

## Implementarea și extinderea experimentului pe date sintetice.

### Pasul 4 - Construirea datasetului sintetic

Construirea și fundamentarea datasetului sintetic sunt prezentate detaliat în documentul separat Dataset sintetic pentru experimentul MCDA, care include regula de codificare, justificarea celor 30 de combinații măsură–criteriu, sursele bibliografice și matricea numerică finală  $X$ .

Documentul conține:

- regula numerică fixă;
- matricea calitativă;
- fundamentarea fiecărei perechi măsură–criteriu;
- matricea numerică  $X$ ;
- trasabilitatea bibliografică;
- regulile de utilizare în experiment.

Matricea utilizată în experiment este:

$$X = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 70 & 50 & 50 \\ 70 & 85 & 50 & 70 & 70 \\ 70 & 85 & 50 & 35 & 70 \\ 50 & 70 & 70 & 50 & 50 \\ 70 & 50 & 70 & 50 & 50 \\ 50 & 70 & 50 & 70 & 70 \end{bmatrix}$$

### Pasul 5 - Definirea profilului de ponderi

Profilul de referință utilizat în experiment este:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

corespunzător criteriilor:

$$(C1, C2, C3, C4, C5)$$

adică:

$$W = (\text{Climatic}, \text{Mobilitate}, \text{Tehnic}, \text{Economic}, \text{Social})$$

cu:

$$w_1 = 0.30$$

$$w_2 = 0.25$$

$$w_3 = 0.15$$

$$w_4 = 0.15$$

$$w_5 = 0.15$$

Verificarea sumei:

$$0.30 + 0.25 + 0.15 + 0.15 + 0.15 = 1.00$$

și:

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

Profilul de referință este valid și poate fi utilizat în calculul clasamentului de bază.

### Pasul 6 - Definirea matematică și calcularea clasamentului de bază

#### 6.1. Datele de intrare

$$X = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 70 & 50 & 50 \\ 70 & 85 & 50 & 70 & 70 \\ 70 & 85 & 50 & 35 & 70 \\ 50 & 70 & 70 & 50 & 50 \\ 70 & 50 & 70 & 50 & 50 \\ 50 & 70 & 50 & 70 & 70 \end{bmatrix}$$

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

$$\sum_{j=1}^5 w_j = 1$$

## 6.2. Calcularea scorului agregat

$$S_i = \sum_{j=1}^5 w_j x_{ij}$$

explicit:

$$S_i = 0.30x_{i1} + 0.25x_{i2} + 0.15x_{i3} + 0.15x_{i4} + 0.15x_{i5}$$

M1 - Zonă cu emisii reduse

$$S_1 = 0.30(50) + 0.25(50) + 0.15(70) + 0.15(50) + 0.15(50)$$

$$S_1 = 15 + 12.5 + 10.5 + 7.5 + 7.5$$

$$\boxed{S_1 = 53.00}$$

M2 - Infrastructură pentru biciclete

$$S_2 = 0.30(70) + 0.25(85) + 0.15(50) + 0.15(70) + 0.15(70)$$

$$S_2 = 21 + 21.25 + 7.5 + 10.5 + 10.5$$

$$\boxed{S_2 = 70.75}$$

M3 - Creșterea frecvenței transportului public

$$S_3 = 0.30(70) + 0.25(85) + 0.15(50) + 0.15(35) + 0.15(70)$$

$$S_3 = 21 + 21.25 + 7.5 + 5.25 + 10.5$$

$$\boxed{S_3 = 65.50}$$

M4 - Optimizarea managementului traficului

$$S_4 = 0.30(50) + 0.25(70) + 0.15(70) + 0.15(50) + 0.15(50)$$

$$S_4 = 15 + 17.5 + 10.5 + 7.5 + 7.5$$

$$\boxed{S_4 = 58.00}$$

M5 — Infrastructură de încărcare EV

$$S_5 = 0.30(70) + 0.25(50) + 0.15(70) + 0.15(50) + 0.15(50)$$

$$S_5 = 21 + 12.5 + 10.5 + 7.5 + 7.5$$

$$\boxed{S_5 = 59.00}$$

M6 - Extinderea zonelor pietonale

$$S_6 = 0.30(50) + 0.25(70) + 0.15(50) + 0.15(70) + 0.15(70)$$

$$S_6 = 15 + 17.5 + 7.5 + 10.5 + 10.5$$

$$\boxed{S_6 = 61.00}$$

Vectorul scorurilor

$$S=(53.00, 70.75, 65.50, 58.00, 59.00, 61.00)$$

### 6.3. Interpretarea scorului

Scorurile obținute sunt indici multicriteriali compoziți utilizați pentru ordonarea relativă a celor șase măsuri.

### 6.4. Construirea clasamentului de bază

Ordinea descrescătoare a scorurilor este:

$$70.75 > 65.50 > 61.00 > 59.00 > 58.00 > 53.00$$

Prin urmare:

| Rang | Măsură                                         | Scor  |
|------|------------------------------------------------|-------|
| 1    | M2 – Infrastructură pentru biciclete           | 70.75 |
| 2    | M3 – Creșterea frecvenței transportului public | 65.50 |
| 3    | M6 – Extinderea zonelor pietonale              | 61.00 |
| 4    | M5 – Infrastructură de încărcare EV            | 59.00 |
| 5    | M4 – Optimizarea managementului traficului     | 58.00 |
| 6    | M1 – Zonă cu emisii reduse                     | 53.00 |

### 6.5. Clasamentul de referință

$$R_0 = M2 > M3 > M6 > M5 > M4 > M1$$

### 6.6. WSM ca metodă de bază

Clasamentul de bază a fost obținut prin metoda WSM, conform procedurii definite în Etapa I.

### 6.7. Contribuția fiecărui criteriu la scor

Matricea contribuțiilor

$$C_{ij} = W_j X_{ij}$$

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 12.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 21 & 21.25 & 7.50 & 10.50 & 10.50 \\ 21 & 21.25 & 7.50 & 5.25 & 10.50 \\ 15 & 17.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 21 & 12.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 15 & 17.50 & 7.50 & 10.50 & 10.50 \end{bmatrix}$$

Verificare:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 c_{ij}$$

### 6.8. Diferența dintre două măsuri

Pentru perechile adiacente:

M2 vs M3

$$\Delta S_{23} = 70.75 - 65.50 = 5.25$$

Pe criterii:

$$\Delta_{23,1} = 0.30(70-70) = 0$$

$$\Delta_{23,2} = 0.25(85-85) = 0$$

$$\Delta_{23,3} = 0.15(50-50) = 0$$

$$\Delta_{23,4} = 0.15(70-35) = 5.25$$

$$\Delta_{23,5} = 0.15(70-70) = 0$$

Verificare:

$$0+0+0+5.25+0 = 5.25$$

M3 vs M6

$$\Delta S_{36} = 65.50 - 61.00 = 4.50$$

Pe criterii:

$$\Delta_{36,1} = 0.30(70-50) = 6.00$$

$$\Delta_{36,2} = 0.25(85-70) = 3.75$$

$$\Delta_{36,3} = 0.15(50-50) = 0$$

$$\Delta_{36,4} = 0.15(35-70) = -5.25$$

$$\Delta_{36,5} = 0.15(70-70) = 0$$

Verificare:

$$6+3.75+0-5.25+0 = 4.50$$

M6 vs M5

$$\Delta S_{65} = 61.00 - 59.00 = 2.00$$

Pe criterii:

$$\Delta_{65,1} = 0.30(50-70) = -6.00$$

$$\Delta_{65,2} = 0.25(70-50) = 5.00$$

$$\Delta_{65,3} = 0.15(50-70) = -3.00$$

$$\Delta_{65,4} = 0.15(70-50) = 3.00$$

$$\Delta_{65,5} = 0.15(70-50) = 3.00$$

Verificare:

$$-6+5-3+3+3 = 2.00$$

M5 vs M4

$$\Delta S_{54} = 59.00 - 58.00 = 1.00$$

Pe criterii:

$$\Delta_{54,1} = 0.30(70-50) = 6.00$$

$$\Delta_{54,2} = 0.25(50-70) = -5.00$$

$$\Delta_{54,3} = 0.15(70-70) = 0$$

$$\Delta_{54,4} = 0.15(50-50) = 0$$

$$\Delta_{54,5} = 0.15(50-50) = 0$$

Verificare:

$$6-5 = 1.00$$

M4 vs M1

$$\Delta S_{41} = 58.00-53.00 = 5.00$$

Pe criterii:

$$\Delta_{41,1} = 0.30(50-50) = 0$$

$$\Delta_{41,2} = 0.25(70-50) = 5.00$$

$$\Delta_{41,3} = 0.15(70-70) = 0$$

$$\Delta_{41,4} = 0.15(50-50) = 0$$

$$\Delta_{41,5} = 0.15(50-50) = 0$$

Verificare:

$$0+5+0+0+0 = 5.00$$

#### 6.9. Verificarea egalităților

$$S_i \neq S_k, \forall i \neq k$$

Nu există egalități de scor în clasamentul de bază.

#### 6.10. Precizia numerică

Calcululele se păstrează la precizia completă; rotunjirea se aplică doar la afișare și după normalizare.

#### 6.11. Normalizarea

$$x_{i,j}^{norm} = x_{i,j}$$

Nu se aplică normalizare suplimentară.

#### 6.12. Reproductibilitatea clasamentului

$$\text{Ranking}(X,W) = R_0$$

pentru aceleași valori ale matricei X și ale vectorului W.

*Rezultatul Pasului 6*

$$\boxed{X + W \rightarrow S \rightarrow R_0}$$

$$\boxed{R_0 = M2 > M3 > M6 > M5 > M4 > M1}$$

### Pasul 7 - Explicarea scorului

#### 7.1. Descompunerea scorului agregat

Pentru fiecare măsură:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 w_j x_{ij}$$

Pentru fiecare criteriu:

$$c_{ij} = w_j x_{ij}$$

Rezultatele descrise și în pasul anterior sunt:

$$M1:(15.00,12.50,10.50,7.50,7.50) \rightarrow S_1 = 53.00$$

$$M2:(21.00,21.25,7.50,10.50,10.50) \rightarrow S_2 = 70.75$$

$$M3:(21.00,21.25,7.50,5.25,10.50) \rightarrow S_3 = 65.50$$

$$M4:(15.00,17.50,10.50,7.50,7.50) \rightarrow S_4 = 58.00$$

$$M5:(21.00,12.50,10.50,7.50,7.50) \rightarrow S_5 = 59.00$$

$$M6:(15.00,17.50,7.50,10.50,10.50) \rightarrow S_6 = 61.00$$

## 7.2. Contribuția absolută și contribuția relativă

Contribuția relativă:

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{S_i} \times 100$$

Rezultatele procentuale:

| Măsură | C1     | C2     | C3     | C4     | C5     |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| M1     | 28.30% | 23.58% | 19.81% | 14.15% | 14.15% |
| M2     | 29.68% | 30.04% | 10.60% | 14.84% | 14.84% |
| M3     | 32.06% | 32.44% | 11.45% | 8.02%  | 16.03% |
| M4     | 25.86% | 30.17% | 18.10% | 12.93% | 12.93% |
| M5     | 35.59% | 21.19% | 17.80% | 12.71% | 12.71% |
| M6     | 24.59% | 28.69% | 12.30% | 17.21% | 17.21% |

## 7.3. Matricea contribuțiilor

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 12.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 21 & 21.25 & 7.50 & 10.50 & 10.50 \\ 21 & 21.25 & 7.50 & 5.25 & 10.50 \\ 15 & 17.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 21 & 12.50 & 10.50 & 7.50 & 7.50 \\ 15 & 17.50 & 7.50 & 10.50 & 10.50 \end{bmatrix}$$

## 7.4. Identificarea contribuțiilor dominante

| Măsură | Cea mai mare contribuție | Valoare | Cea mai mică contribuție | Valoare |
|--------|--------------------------|---------|--------------------------|---------|
| M1     | C1 Climatic              | 15.00   | C4 / C5                  | 7.50    |
| M2     | C2 Mobilitate            | 21.25   | C3 Tehnic                | 7.50    |
| M3     | C2 Mobilitate            | 21.25   | C4 Economic              | 5.25    |
| M4     | C2 Mobilitate            | 17.50   | C4 / C5                  | 7.50    |
| M5     | C1 Climatic              | 21.00   | C4 / C5                  | 7.50    |
| M6     | C2 Mobilitate            | 17.50   | C3 Tehnic                | 7.50    |

## Pasul 8 - Explicarea diferenței dintre două măsuri și a relației de ordine

Pornim de la clasamentul de referință:

$$R_0 = M2 > M3 > M6 > M5 > M4 > M1$$

și analizăm perechile adiacente din clasament.

### 8.1. Diferența dintre scorurile agregate

Pentru două măsuri  $M_a$  și  $M_b$ :

$$\Delta S_{ab} = S_a - S_b$$

Rezultă:

$$\Delta S_{23} = 70.75 - 65.50 = 5.25$$

$$\Delta S_{36} = 65.50 - 61.00 = 4.50$$

$$\Delta S_{65} = 61.00 - 59.00 = 2.00$$

$$\Delta S_{54} = 59.00 - 58.00 = 1.00$$

$$\Delta S_{41} = 58.00 - 53.00 = 5.00$$

### 8.2. Contribuția criteriilor la diferență

Pentru fiecare criteriu:

$$\Delta_{ab,j} = w_j(x_{aj} - x_{bj})$$

iar:

$$\Delta S_{ab} = \sum_{j=1}^5 \Delta_{ab,j}$$

Această relație va constitui baza matematică pentru explicarea diferenței dintre două măsuri.

Valorile calculate anterior sunt:

| Pereche | C1    | C2    | C3    | C4    | C5    | $\Delta S$   |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| M2–M3   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | +5.25 | 0.00  | <b>+5.25</b> |
| M3–M6   | +6.00 | +3.75 | 0.00  | –5.25 | 0.00  | <b>+4.50</b> |
| M6–M5   | –6.00 | +5.00 | –3.00 | +3.00 | +3.00 | <b>+2.00</b> |
| M5–M4   | +6.00 | –5.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | <b>+1.00</b> |
| M4–M1   | 0.00  | +5.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | <b>+5.00</b> |

### 8.3. Interpretarea semnului contribuției

$$\Delta_{ab,j} > 0$$

indică un avantaj al măsurii  $M_a$  pe criteriul  $C_j$ ;

$$\Delta_{ab,j} < 0$$

indică un avantaj al măsurii  $M_b$ ;

$$\Delta_{ab,j} = 0$$

indică faptul că respectivul criteriu nu contribuie la diferența dintre cele două măsuri.

#### 8.4. Explicarea relațiilor de ordine

Pentru perechea **M2 - M1**:

$$\Delta_{21} = (+6.00, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{21} = 17.75$$

Criteriile C1, C2, C4 și C5 avantajează M2, iar C3 avantajează M1.

Pentru perechea **M2 - M3**:

$$\Delta_{23} = (0, 0, 0, +5.25, 0)$$

$$\Delta S_{23} = 5.25$$

Pentru perechea **M2 - M4**:

$$\Delta_{24} = (+6.00, +3.75, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{24} = 12.75$$

Criteriile C1, C2, C4 și C5 avantajează M2, iar C3 avantajează M4.

Pentru perechea **M2 - M5**:

$$\Delta_{25} = (0, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{25} = 11.75$$

Criteriile C2, C4 și C5 avantajează M2, iar C3 avantajează M5.

Pentru perechea **M2 - M6**

$$\Delta_{26} = (+6.00, +3.75, 0, 0, 0)$$

$$\Delta S_{26} = 9.75$$

Criteriile C1 și C2 avantajează M2; celelalte criterii nu diferențiază cele două măsuri.

Diferența este produsă integral de criteriul C4.

Pentru perechea **M3 - M1**:

$$\Delta_{31} = (+6.00, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00)$$

$$\Delta S_{31} = 12.50$$

Criteriile C1, C2 și C5 avantajează M3, iar C3 și C4 avantajează M1.

Pentru perechea **M3 - M4**:

$$\Delta_{34} = (+6.00, +3.75, -3.00, -2.25, +3.00)$$

$$\Delta S_{34} = 7.50$$

Criteriile C1, C2 și C5 avantajează M3, iar C3 și C4 avantajează M4.

Pentru perechea **M3 - M5**:

$$\Delta_{35} = (0, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00)$$

$$\Delta S_{35} = 6.50$$

Criteriile C2 și C5 avantajează M3, iar C3 și C4 avantajează M5.

Pentru perechea **M3 - M6**:

$$\Delta_{36} = (+6.00, +3.75, 0, -5.25, 0)$$

$$\Delta S_{36} = 4.50$$

Criteriile C1 și C2 avantajează M3, iar C4 avantajează M6.

Pentru perechea **M6 - M1**:

$$\Delta_{61} = (0, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{61} = 8.00$$

Criteriile C2, C4 și C5 avantajează M6, iar C3 avantajează M1; C1 nu diferențiază cele două măsuri.

Pentru perechea **M6 - M4**:

$$\Delta_{64} = (0, 0, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{64} = 3.00$$

Criteriile C4 și C5 avantajează M6, iar C3 avantajează M4; C1 și C2 nu diferențiază cele două măsuri.

Pentru perechea **M6 - M5**:

$$\Delta_{65} = (-6.00, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00)$$

$$\Delta S_{65} = 2.00$$

Criteriile C2, C4 și C5 avantajează M6, iar C1 și C3 avantajează M5.

Pentru perechea **M5 - M1**:

$$\Delta_{51} = (+6.00, 0, 0, 0, 0)$$

$$\Delta S_{51} = 6.00$$

Criteriul C1 avantajează M5; celelalte criterii nu diferențiază cele două măsuri.

Pentru perechea **M5 - M4**:

$$\Delta_{54} = (+6.00, -5.00, 0, 0, 0)$$

$$\Delta S_{54} = 1.00$$

Criteriul C1 avantajează M5, iar C2 avantajează M4.

Pentru perechea **M4 - M1**:

$$\Delta_{41} = (0, +5.00, 0, 0, 0)$$

$$\Delta S_{41} = 5.00$$

Diferența este produsă integral de criteriul C2.

| Pereche | Vectorul contribuțiilor<br>(C1,C2,C3,C4,C5) | $\Delta S$ | Criterii care<br>avantajează prima<br>măsură | Criterii care<br>avantajează a doua<br>măsură |
|---------|---------------------------------------------|------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| M2 - M3 | (0, 0, 0, +5.25, 0)                         | 5.25       | C4                                           | —                                             |
| M2 - M6 | (+6.00, +3.75, 0, 0, 0)                     | 9.75       | C1, C2                                       | —                                             |
| M2 - M5 | (0, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)             | 11.75      | C2, C4, C5                                   | C3                                            |
| M2 - M4 | (+6.00, +3.75, -3.00, +3.00, +3.00)         | 12.75      | C1, C2, C4, C5                               | C3                                            |
| M2 - M1 | (+6.00, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)         | 17.75      | C1, C2, C4, C5                               | C3                                            |
| M3 - M6 | (+6.00, +3.75, 0, -5.25, 0)                 | 4.50       | C1, C2                                       | C4                                            |

|         |                                     |       |            |        |
|---------|-------------------------------------|-------|------------|--------|
| M3 - M5 | (0, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00)     | 6.50  | C2, C5     | C3, C4 |
| M3 - M4 | (+6.00, +3.75, -3.00, -2.25, +3.00) | 7.50  | C1, C2, C5 | C3, C4 |
| M3 - M1 | (+6.00, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00) | 12.50 | C1, C2, C5 | C3, C4 |
| M6 - M5 | (-6.00, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00) | 2.00  | C2, C4, C5 | C1, C3 |
| M6 - M4 | (0, 0, -3.00, +3.00, +3.00)         | 3.00  | C4, C5     | C3     |
| M6 - M1 | (0, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00)     | 8.00  | C2, C4, C5 | C3     |
| M5 - M4 | (+6.00, -5.00, 0, 0, 0)             | 1.00  | C1         | C2     |
| M5 - M1 | (+6.00, 0, 0, 0, 0)                 | 6.00  | C1         | —      |
| M4 - M1 | (0, +5.00, 0, 0, 0)                 | 5.00  | C2         | —      |

#### 8.5. Identificarea criteriului cu cea mai mare contribuție

Pentru fiecare criteriu:

$$\Delta_{ab,j} = w_j(x_{aj} - x_{bj})$$

$$j^* = \arg \max_j |\Delta_{ab,j}|$$

Criteriul cu cea mai mare valoare absolută este criteriul cu cea mai mare contribuție la diferența dintre scoruri.

Semnul ne spune în favoarea cărei măsuri lucrează criteriul.

| Pereche | Criteriul cu cea mai mare contribuție | Contribuție           | Avantajează  |
|---------|---------------------------------------|-----------------------|--------------|
| M2 - M3 | C4 – Performanță economică            | +5.25                 | M2           |
| M2 - M6 | C1 – Performanță climatică            | +6.00                 | M2           |
| M2 - M5 | C2 – Performanță asupra mobilității   | +8.75                 | M2           |
| M2 - M4 | C1 – Performanță climatică            | +6.00                 | M2           |
| M2 - M1 | C2 – Performanță asupra mobilității   | +8.75                 | M2           |
| M3 - M6 | C1 – Performanță climatică            | +6.00                 | M3           |
| M3 - M5 | C2 – Performanță asupra mobilității   | +8.75                 | M3           |
| M3 - M4 | C1 – Performanță climatică            | +6.00                 | M3           |
| M3 - M1 | C2 – Performanță asupra mobilității   | +8.75                 | M3           |
| M6 - M5 | C1 – Performanță climatică            | -6.00                 | M5           |
| M6 - M4 | C3 / C4 / C5                          | -3.00 / +3.00 / +3.00 | M4 / M6 / M6 |

|         |                                     |       |    |
|---------|-------------------------------------|-------|----|
| M6 - M1 | C2 – Performanță asupra mobilității | +5.00 | M6 |
| M5 - M4 | C1 – Performanță climatică          | +6.00 | M5 |
| M5 - M1 | C1 – Performanță climatică          | +6.00 | M5 |
| M4 - M1 | C2 – Performanță asupra mobilității | +5.00 | M4 |

Pentru perechea M6 - M4 nu există un singur criteriu cu contribuție maximă. Trei criterii au aceeași valoare absolută:

$$|\Delta_{64,3}| = |\Delta_{64,4}| = |\Delta_{64,5}| = 3.00$$

C3 avantajează M4:

$$\Delta_{64,3} = -3.00$$

iar C4 și C5 avantajează M6:

$$\Delta_{64,4} = +3.00$$

$$\Delta_{64,5} = +3.00$$

Pentru această pereche contribuția maximă este partajată între C3, C4 și C5.

#### 8.6. Explicarea relațiilor relevante din clasament

Pentru clasamentul de referință:

$$R_0 = M2 > M3 > M6 > M5 > M4 > M1$$

sunt analizate cu prioritate relațiile dintre măsurile adiacente.

| Pereche | Vectorul contribuțiilor<br>(C1,C2,C3,C4,C5) | $\Delta S$ | Explicația relației de ordine                                          |
|---------|---------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------|
| M2 - M3 | (0, 0, 0, +5.25, 0)                         | 5.25       | M2 este înaintea M3 exclusiv datorită avantajului pe C4.               |
| M2 - M6 | (+6.00, +3.75, 0, 0, 0)                     | 9.75       | M2 este înaintea M6 datorită avantajelor pe C1 și C2.                  |
| M2 - M5 | (0, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)             | 11.75      | M2 este avantajat de C2, C4 și C5; M5 compensează parțial prin C3.     |
| M2 - M4 | (+6.00, +3.75, -3.00, +3.00, +3.00)         | 12.75      | M2 este avantajat de C1, C2, C4 și C5; M4 compensează parțial prin C3. |
| M2 - M1 | (+6.00, +8.75, -3.00, +3.00, +3.00)         | 17.75      | M2 este avantajat de C1, C2, C4 și C5; M1 compensează parțial prin C3. |
| M3 - M6 | (+6.00, +3.75, 0, -5.25, 0)                 | 4.50       | M3 este avantajat de C1 și C2; M6 compensează prin C4.                 |
| M3 - M5 | (0, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00)             | 6.50       | M3 este avantajat de C2 și C5; M5 compensează prin C3 și C4.           |
| M3 - M4 | (+6.00, +3.75, -3.00, -2.25, +3.00)         | 7.50       | M3 este avantajat de C1, C2 și C5; M4 compensează prin C3 și C4.       |

|         |                                     |       |                                                                                |
|---------|-------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------|
| M3 - M1 | (+6.00, +8.75, -3.00, -2.25, +3.00) | 12.50 | M3 este avantajat de C1, C2 și C5; M1 compensează prin C3 și C4.               |
| M6 - M5 | (-6.00, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00) | 2.00  | M6 este avantajat de C2, C4 și C5; M5 compensează prin C1 și C3.               |
| M6 - M4 | (0, 0, -3.00, +3.00, +3.00)         | 3.00  | M6 este avantajat de C4 și C5; M4 compensează prin C3.                         |
| M6 - M1 | (0, +5.00, -3.00, +3.00, +3.00)     | 8.00  | M6 este avantajat de C2, C4 și C5; M1 compensează prin C3.                     |
| M5 - M4 | (+6.00, -5.00, 0, 0, 0)             | 1.00  | M5 este înaintea M4 deoarece avantajul pe C1 depășește avantajul lui M4 pe C2. |
| M5 - M1 | (+6.00, 0, 0, 0, 0)                 | 6.00  | M5 este înaintea M1 exclusiv datorită avantajului pe C1.                       |
| M4 - M1 | (0, +5.00, 0, 0, 0)                 | 5.00  | M4 este înaintea M1 exclusiv datorită avantajului pe C2.                       |

#### Rezultatul pasului 8

Pentru toate cele 15 perechi distincte din clasamentul de referință au fost explicate diferențele de scor prin contribuțiile ponderate ale criteriilor, cu verificarea:

$$\Delta S_{ab} = \sum_{j=1}^5 \Delta_{ab,j}$$

- $M2 > M3$ : M2 este clasată înaintea M3 cu 5,25 puncte, diferența fiind explicată integral de avantajul pe C4 – performanță economică.
- $M2 > M6$ : M2 este clasată înaintea M6 cu 9,75 puncte datorită avantajelor pe C1 – performanță climatică și C2 – performanță asupra mobilității.
- $M2 > M5$ : M2 este clasată înaintea M5 cu 11,75 puncte datorită avantajelor pe C2, C4 și C5; M5 compensează parțial prin C3.
- $M2 > M4$ : M2 este clasată înaintea M4 cu 12,75 puncte datorită avantajelor pe C1, C2, C4 și C5; M4 compensează parțial prin C3.
- $M2 > M1$ : M2 este clasată înaintea M1 cu 17,75 puncte datorită avantajelor pe C1, C2, C4 și C5; M1 compensează parțial prin C3.
- $M3 > M6$ : M3 este clasată înaintea M6 cu 4,50 puncte datorită avantajelor pe C1 și C2; M6 compensează parțial prin C4.
- $M3 > M5$ : M3 este clasată înaintea M5 cu 6,50 puncte datorită avantajelor pe C2 și C5; M5 compensează parțial prin C3 și C4.
- $M3 > M4$ : M3 este clasată înaintea M4 cu 7,50 puncte datorită avantajelor pe C1, C2 și C5; M4 compensează parțial prin C3 și C4.
- $M3 > M1$ : M3 este clasată înaintea M1 cu 12,50 puncte datorită avantajelor pe C1, C2 și C5; M1 compensează parțial prin C3 și C4.
- $M6 > M5$ : M6 este clasată înaintea M5 cu 2,00 puncte datorită avantajelor pe C2, C4 și C5; M5 compensează prin C1 și C3.
- $M6 > M4$ : M6 este clasată înaintea M4 cu 3,00 puncte datorită avantajelor pe C4 și C5; M4 compensează parțial prin C3.
- $M6 > M1$ : M6 este clasată înaintea M1 cu 8,00 puncte datorită avantajelor pe C2, C4 și C5; M1 compensează parțial prin C3.

- $M5 > M4$ : M5 este clasată înaintea M4 cu 1,00 punct, deoarece avantajul pe C1 – performanță climatică depășește avantajul lui M4 pe C2 – performanță asupra mobilității.
- $M5 > M1$ : M5 este clasată înaintea M1 cu 6,00 puncte, diferența fiind explicată integral de avantajul pe C1 – performanță climatică.
- $M4 > M1$ : M4 este clasată înaintea M1 cu 5,00 puncte, diferența fiind explicată integral de avantajul pe C2 – performanță asupra mobilității.

## Pasul 9. Definirea contrafactualului

Scopul acestei etape este de a trece de la explicația descriptivă a ordinii existente la o explicație de tip: *Ce modificare minimă a ponderilor criteriilor ar fi necesară pentru ca ordinea dintre două măsuri să se inverseze?*

### 9.1. Problema de optimizare

Pentru fiecare relație inițială:

$$M_a > M_b$$

se caută un profil:

$$W' = (w_1', w_2', w_3', w_4', w_5')$$

care produce:

$$S_b(W') \geq S_a(W') + \varepsilon$$

cu:

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

și respectă:

$$w_j' \geq 1$$

$$\sum_{j=1}^5 w_j' = 1$$

Modificarea minimă este definită prin:

$$\min \|W' - W\|_1$$

unde:

$$\|W' - W\|_1 = \sum_{j=1}^5 |w_j' - w_j|$$

Profilul inițial este:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

Pentru interpretare utilizăm și cantitatea efectiv redistribuită  $R_W$ :

$$R_W = \frac{1}{2} \|W' - W\|_1$$

Explicație:

Ne asumăm că în problema noastră suma ponderilor rămâne constantă:

$$\sum_j w_j = \sum_j w_j' = 1$$

Factorul  $\frac{1}{2}$  apare deoarece norma  $L_1$  numără de două ori aceeași redistribuire: o dată la criteriul de la care scade ponderea și o dată la criteriul la care crește.

De exemplu:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15) = 1$$

și:

$$W' = (0.27, 0.26, 0.16, 0.16, 0.15) = 1$$

Avem:

$$\Delta W = (-0.03, +0.01, +0.01, +0.01, 0)$$

Norma  $L_1$  este:

$$L_1 = \|W' - W\|_1 = |-0.03| + |0.01| + |0.01| + |0.01| + 0 = 0.06$$

Dar în realitate nu am „redistribuit” 0,06. Am mutat 0,03 (trei puncte procentuale) din C1 către C2, C3, C4. De aceea:

$$\text{pondere redistribuită} = \frac{1}{2} \|W' - W\|_1 = \frac{0.06}{2} = 0.03$$

din C1 se reduc 0.03, iar acești 0.03 sunt redistribuiți astfel:

$$C1: +0.01$$

$$C2: +0.01$$

$$C3: +0.01$$

Motivul general este:

$$\sum_j (w'_j - w_j) = 0$$

Prin urmare, suma tuturor creșterilor este egală cu suma absolută a tuturor scăderilor. Dacă notăm această cantitate cu  $R$ :

$$\|W' - W\|_1 = R + R = 2R$$

de unde:

$$R = \frac{1}{2} \|W' - W\|_1$$

## 9.2. Calculul profilului de frontieră pentru toate perechile

$W^*$  = profilul de frontieră sau profilul minim, modificat pentru care:

$$S_a(W^*) = S_b(W^*)$$

la  $W^*$  avem doar egalitate între cele două măsuri.

În schimb  $W'$  este profilul contrafactual propriu-zis, adică profilul pentru care ordinea este deja inversată:

$$S_b(W') \geq S_a(W')$$

Sau, cu toleranța numerică:

$$S_b(W') \geq S_a(W') + \varepsilon$$

Deci relația este:

$$W \rightarrow W^* \rightarrow W'$$

unde:

- $W$  = profil inițial;
- $W^*$  = frontieră de egalitate;

- $W'$  = profil aflat puțin dincolo de frontieră, care produce inversarea.

Pentru perechile unde inversarea este posibilă,  $W'$  va fi foarte apropiat de  $W^*$ , dar ușor trecut de frontieră.

*Calculul profilului minim  $W^*$*

Profilul inițial este:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

Pentru o pereche  $M_a > M_b$ , condiția de frontieră este:

$$S_a(W^*) = S_b(W^*)$$

adică:

$$(X_a - X_b) \cdot W^* = 0$$

cu:

$$\sum_{j=1}^5 w_j' = 1, w_j' \geq 0$$

Dintre toate profilele care satisfac aceste condiții alegem unul care minimizează:

$$\|W^* - W\|_1$$

$$X_1 = (50, 50, 70, 50, 50)$$

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$X_4 = (50, 70, 70, 50, 50)$$

$$X_5 = (70, 50, 70, 50, 50)$$

$$X_6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

### 1. Perechea $M_2 - M_3$ ( $M_2 > M_3$ )

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

$$X_2 - X_3 = (0, 0, 0, 35, 0)$$

Condiția de frontieră:

$$35w_4^* = 0$$

de unde:

$$w_4^* = 0$$

Trebuie redistribuită ponderea inițială 0.15 a lui  $C_4$  către celelalte criterii. O soluție optimă este:

$$W_{23}^* = (0.45, 0.25, 0.15, 0, 0.15)$$

Verificare:

$$0.45 + 0.25 + 0.15 + 0 + 0.15 = 1$$

și:

$$S_2(W^*) = S_3(W^*)$$

deoarece:

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$W^* = (0.45, 0.25, 0.15, 0, 0.15)$$

Calculăm:

$$S_2(W^*) = 0.45 \cdot 70 + 0.25 \cdot 85 + 0.15 \cdot 50 + 0 \cdot 70 + 0.15 \cdot 70 = 70.75$$

$$S_3(W^*) = 0.45 \cdot 70 + 0.25 \cdot 85 + 0.15 \cdot 50 + 0 \cdot 35 + 0.15 \cdot 70 = 70.75$$

$$\Delta W = (+0.15, 0, 0, -0.15, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.15 + 0.15 = 0.30$$

$$R = \frac{1}{2} 0.30 = 0.15$$

Egalitatea apare pentru că singurul criteriu pe care  $M_2$  și  $M_3$  diferă este  $C_4$ , iar în  $W^*$ :  $w_4^* = 0$

Prin urmare, diferența de performanță dintre ele pe  $C_4$  nu mai contribuie deloc la scor.

## 2. Perechea $M_2 - M_6$ ( $M_2 > M_6$ )

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

$$X_2 - X_6 = (20, 15, 0, 0, 0)$$

Condiția:

$$20w_1^* + 15w_2^* = 0$$

Cum ponderile sunt nenegative:

$$w_1^* = 0 \text{ și } w_2^* = 0$$

Trebuie redistribuit:

$$0.30 + 0.25 = 0.55$$

O soluție optimă este:

$$W^* = (0, 0, 0.15, 0.70, 0.15) = 1$$

$$\Delta W = (-0.30, -0.25, 0, +0.55, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.30 + 0.25 + 0.55 = 1.10$$

$$R = \frac{1}{2} 1.10 = 0.55$$

Pentru perechea  $M_2 - M_6$ , această configurație spune că, pentru a ajunge exact la egalitatea dintre cele două măsuri, importanța criteriilor  $C_1$  și  $C_2$  trebuie anulată complet, iar ponderea lor totală de 0.55 este redistribuită către celelalte criterii. În exemplul ales, cei 0,55 au fost transferați integral către  $C_4$ :

## 3. Perechea $M_2 - M_5$

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_5 = (70, 50, 70, 50, 50)$$

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

$$X_2 - X_5 = (0, 35, -20, 20, 20)$$

Condiția de frontieră:

$$20w_1^* + 15w_2^* - 20w_3^* + 20w_4^* + 20w_5^* = 0$$

aici calculam diferit: Aici unele criterii favorizează M2, iar alt criteriu favorizează M5. De aceea trebuie să determinăm care transfer de pondere produce egalitatea cu modificarea minimă.

Diferența inițială este:

$$\Delta S_{25} = 35(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = 11.75$$

Transferul cel mai eficient este între C2 către C3, deoarece mutarea unei unități de pondere reduce diferența cu:

$$35 - (-20) = 55$$

puncte per unitate de pondere.

Prin urmare trebuie redistribuit:

$$11.75 - 55t = 0, t = 0.21364$$

Rezultă:

$$w_2^* = 0.25 - 0.21364 = 0.03636$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.21364 = 0.36364$$

$$W^* = (0.30, 0.03636, 0.36364, 0.15, 0.15) = 1$$

$$\Delta W = (0, -0.21364, +0.21364, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.21364 + 0.21364 \approx 0.42727$$

$$R = \frac{1}{2} 0.42727 = 0.21364$$

aproximativ 21,36 puncte procentuale din importanța acordată performanței asupra mobilității (C2) sunt transferate către fezabilitatea tehnică (C3). C1, C4 și C5 rămân neschimbate.

#### 4. Perechea M2 – M4

Vectorii de performanță sunt:

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_4 = (50, 70, 70, 50, 50)$$

Diferența dintre performanțe este:

$$X_2 - X_4 = (20, 15, -20, 20, 20)$$

Prin urmare:

$$S_2 - S_4 = 20w_1 + 15w_2 - 20w_3 + 20w_4 + 20w_5$$

Pentru profilul inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

obținem:

$$\Delta S_{24} = 20(0.30) + 15(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = 12.75$$

Deci inițial  $M_2 > M_4$  cu 12,75 puncte. Pentru a ajunge la frontieră trebuie să reducem această diferență de la Criteriul C3 este singurul care avantajează M4:  $-20w_3$

Prin urmare, pentru a favoriza M4 trebuie să **creștem ponderea lui C3**, luând pondere de la criteriile care avantajează M2.

C1, C4 și C5 au fiecare coeficientul: +20

Dacă transferăm o cantitate  $t$  de la unul dintre aceste criterii către C3, efectul asupra diferenței este:

$$20 - (-20) = 40$$

Astfel:

$$12.75 - 40t = 0, t = 0.31875$$

Trebuie deci redistribuită o pondere totală de 0.31875 către C3

C1 are inițial numai:  $w_1=0.30$  din care putem scădea 0.30 rezulta  $w_1^* = 0$

Mai rămân de transferat  $0.31875 - 0.30 = 0.01875$ . Această diferență poate fi luată, de exemplu, din C4:

$$w_4^* = 0.15 - 0.01875 = 0.13125$$

C3 primește întreaga cantitate:

$$w_3^* = 0.15 + 0.31875 = 0.46875$$

C2 și C5 rămân neschimbate:

Rezultă profilul de frontieră:

$$W^* = (0, 0.25, 0.46875, 0.13125, 0.15) = 1$$

$$S_2(W^*) = S_4(W^*) = 64.375$$

31,875 puncte procentuale de pondere sunt transferate către C3 – fezabilitatea tehnică, 30 puncte procentuale provenind din C1 și 1,875 puncte procentuale din C4.

$$\Delta W = (-0.30, 0, +0.31875, -0.01875, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.30 + 0.31875 + 0.01875 = 0.63750$$

$$R = \frac{1}{2} 0.63750 = 31.875$$

## 5. Perechea M2 – M1

Vectorii de performanță sunt:

$$X_2 = (70, 85, 50, 70, 70)$$

$$X_1 = (50, 50, 70, 50, 50)$$

Diferența dintre performanțe este:

$$X_2 - X_1 = (20, 35, -20, 20, 20)$$

Prin urmare:

$$S_2 - S_1 = 20w_1 + 35w_2 - 20w_3 + 20w_4 + 20w_5$$

Pentru profilul inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

rezultă:

$$\Delta S_{21} = 20(0.30) + 35(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = 6 + 8.75 - 3 + 3 + 3 = 17.75$$

Deci inițial  $M_2 > M_1$  cu 17,75 puncte.

Pentru a ajunge la frontieră trebuie să reducem diferența:  $17.75 \rightarrow 0$

C3 este singurul criteriu care avantajează M1:  $-20w_3$ . Prin urmare, trebuie să creștem ponderea lui C3, luând pondere de la criteriile care avantajează M2.

Criteriul C2 are coeficientul pozitiv cel mai mare: +35

Transferul unei cantități  $t$  de la C2 către C3 modifică diferența de la:

$$35 - (-20) = 55$$

Putem transfera maximum ponderea disponibilă în C2:

$$w_2 = 0.25$$

Transferăm mai întâi:

$$t_1 = 0.25$$

de la C2 către C3.

Reducerea diferenței este:

$$55(0.25) = 13.75$$

Diferența rămasă este:

$$17.75 - 13.75 = 4.00$$

După acest transfer:

$$w_2^* = 0.25 - 0.25 = 0$$

iar C3 devine temporar:

$$w_3 = 0.15 + 0.25 = 0.40$$

C1, C4 și C5 au fiecare coeficient: +20

Transferul de la oricare dintre acestea către C3 reduce diferența cu:

$$20 - (-20) = 40$$

transferul suplimentar cu  $t_2$ :

$$4 - 40t_2 = 0, t_2 = 0.10$$

Putem lua, de exemplu, această pondere din C1:

$$w_1^* = 0.30 - 0.10 = 0.20$$

iar C3 primește și această cantitate:

$$w_3 = 0.40 + 0.10 = 0.50$$

C4 și C5 rămân neschimbate

Rezultă:

$$W^* = (0.20, 0, 0.50, 0.15, 0.15) = 1$$

Modificările față de profilul inițial sunt:

$$\Delta W = (-0.10, -0.25, +0.35, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.10 + 0.25 + 0.35 = 0.70$$

$$R = \frac{1}{2} 0.70 = 0.35$$

În total sunt redistribuite 35 puncte procentuale de pondere către C3, dintre care 25 provin din C2 și 10 din C1.

$$S_2(W^*) = S_1(W^*) = 60$$

## 6. Perechea M3 – M6

Vectorii de performanță sunt:

$$X_3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$X_6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

Diferența dintre performanțe este:

$$X_3 - X_6 = (20, 15, 0, -35, 0)$$

Prin urmare:

$$S_3 - S_6 = 20w_1 + 15w_2 - 35w_4$$

Pentru profilul inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

rezultă:

$$\Delta S_{36} = 20(0.30) + 15(0.25) + 0(0.15) - 35(0.15) + 0(0.15) = 6 + 3.75 - 5.25 = 4.50$$

M3 > M6 cu 4,50 puncte.

Pentru a ajunge la frontieră trebuie să reducem diferența: 4.50 → 0

C4 este criteriul care avantajează M6:  $-35w_4$

Prin urmare, trebuie să creștem ponderea C4, luând pondere de la un criteriu care avantajează M3.

Transferul este cel mai eficient de la **C1 către C4**, deoarece mutarea unei unități de pondere modifică diferența de la:

$$20 - (-35) = 55$$

Condiția de frontieră:

$$4.50 - 55t = 0, t = 0.08182$$

Dacă transferăm cantitatea  $t$  de la C1 către C4:

$$w_1^* = 0.30 - t = 0.30 - 0.08182 = 0.21818$$

$$w_4^* = 0.15 + 0.08182 = 0.23182$$

iar celelalte ponderi rămân neschimbate:

$$w_2^* = 0.25; w_3^* = 0.15; w_5^* = 0.15$$

Rezultă profilul de frontieră:

$$W^* = (0.21818, 0.25, 0.15, 0.23182, 0.15) = 1$$

$$S_3(W^*) = S_6(W^*) \approx 62.6363$$

Modificările sunt:

$$\Delta W = (-0.08182, 0, 0, +0.08182, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.08182 + 0.08182 = 0.16364$$

$$R = \frac{1}{2} 0.16364 = 0.08182$$

8,182 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C1 – performanță climatică către C4 – performanță economică.

### 7. *Perechea M3 – M5*

Vectorii de performanță sunt:

$$X3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$X5 = (70, 50, 70, 50, 50)$$

Diferența dintre performanțe este:

$$X3 - X5 = (0, 35, -20, -15, 20)$$

Prin urmare:

$$S3 - S5 = 35w_2 - 20w_3 - 15w_4 + 20w_5$$

Pentru profilul inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

rezultă:

$$\Delta S35 = 0(0.30) + 35(0.25) - 20(0.15) - 15(0.15) + 20(0.15) = 0 + 8.75 - 3 - 2.25 + 3 = 6.50 \text{ (Pentru a ajunge la frontieră trebuie să reducem diferența cu 6.50)}$$

M3 > M5 cu 6,50 puncte.

Criteriile care avantajează M5 sunt: C3: -20; C4: -15

Criteriile care avantajează M3 sunt: C2: +35; C5: +20

Transferul cel mai eficient este de la C2 către C3, deoarece mutarea unei unități de pondere modifică diferența de la: +35 → -20

Prin urmare, fiecare unitate transferată reduce diferența cu:

$$35 - (-20) = 55$$

Condiția de frontieră devine:

$$6.50 - 55t = 0, t = 0.11818$$

Dacă transferăm cantitatea  $t$  de la C2 către C3:

$$w_2^* = 0.25 - t = 0.25 - 0.11818 = 0.13182$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.11818 = 0.26818$$

iar celelalte ponderi rămân neschimbate:

$$w_1^* = 0.30; w_4^* = 0.15; w_5^* = 0.15$$

Rezultă profilul de frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.13182, 0.26818, 0.15, 0.15) = 1$$

$$S_3(W^*) = S_5(W^*) \approx 61.3637$$

Modificările sunt:

$$\Delta W = (0, -0.11818, +0.11818, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.11818 + 0.11818 = 0.23636$$

$$R = \frac{1}{2} 0.23636 = 0.11818$$

11,818 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C2 – performanță asupra mobilității către C3 – fezabilitate tehnică.

### **8. Perechea M3 – M4**

Vectorii de performanță sunt:

$$X3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$X4 = (50, 70, 70, 50, 50)$$

Diferența dintre performanțe este:

$$X3 - X4 = (20, 15, -20, -15, 20)$$

Prin urmare:

$$S3 - S4 = 20w_1 + 15w_2 - 20w_3 - 15w_4 + 20w_5$$

Pentru profilul inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

rezultă:

$$S34 = 20(0.30) + 15(0.25) - 20(0.15) - 15(0.15) + 20(0.15) = 6 + 3.75 - 3 - 2.25 + 3 = 7.50$$

M3 > M4 cu 7,50 puncte.

Criteriile care avantajează M4 sunt: C3: -20; C4: -15

criteriile care avantajează M3 sunt: C1: +20; C2: +15; C5: +20

Transferul cel mai eficient se poate face de la C1 către C3 sau, echivalent, de la C5 către C3, deoarece în ambele cazuri ponderea este mutată de la un coeficient +20 la unul 20.

Alegem transferul: C1 → C3

Pentru fiecare unitate de pondere transferată, diferența dintre scoruri scade cu:

$$20 - (-20) = 40$$

Prin urmare, condiția de frontieră este:

$$7.50 - 40t = 0, t = 0.18750$$

rezultă:

$$w_1^* = 0.30 - 0.18750 = 0.11250$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.18750 = 0.33750$$

iar:

$$w_2^* = 0.25; w_4^* = 0.15; w_5^* = 0.15$$

profilul de frontieră este:

$$W^* = (0.11250, 0.25, 0.33750; 0.15; 0.15) = 1$$

$$S_3(W^*) = S_4(W^*) \approx 61.75$$

Modificările sunt:

$$\Delta W = (-0.18750, 0, +0.18750, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.18750 + 0.18750 = 0.37500$$

$$R = \frac{1}{2} 0.37500 = 0.18750$$

8,75 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C1 – performanță climatică către C3 – fezabilitate tehnică.

### 9. *Perechea M3 – M1*

Vectorii de performanță sunt:

$$X3 = (70, 85, 50, 35, 70)$$

$$X1 = (50, 50, 70, 50, 50)$$

$$X3 - X1 = (20, 35, -20, -15, 20)$$

$$S3 - S1 = 20w_1 + 35w_2 - 20w_3 - 15w_4 + 20w_5$$

$$\Delta S31 = 20(0.30) + 35(0.25) - 20(0.15) - 15(0.15) + 20(0.15) = 6 + 8.75 - 3 - 2.25 + 3 = 12.50$$

M3 > M1 cu 12,50 puncte.

Criteriile care avantajează M1 sunt: C3: -20; C4: -15

iar criteriile care avantajează M3 sunt: C1: +20; C2: +35; C5: +20

Transferul cel mai eficient este de la C2 către C3, deoarece mutăm pondere de la coeficientul pozitiv cel mai mare +35 către coeficientul negativ cu valoarea absolută cea mai mare -20

$$35 - (-20) = 55$$

Condiția de frontieră devine:

$$12.50 - 55t = 0, t = 0.22727$$

Ponderea C2 este suficientă pentru acest transfer, deoarece:  $0.22727 < 0.25$

Prin urmare:

$$w_2^* = 0.25 - 0.22727 = 0.02273$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.22727 = 0.37727$$

iar:

$$w_1^* = 0.30; w_4^* = 0.15; w_5^* = 0.15$$

Profilul de frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.02273, 0.37727, 0.15, 0.15) = 1$$

$$S_3(W^*) = S_4(W^*) \approx 57.5455$$

Modificările sunt:

$$\Delta W = (0, -0.22727, +0.22727, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 \approx 0.45455$$

$$R = \frac{1}{2} 0.45455 = 0.22727$$

22,727 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C2 – performanță asupra mobilității către C3 – fezabilitate tehnică.

#### **10. Perechea M6 – M5**

Vectorii de performanță sunt:

$$X_6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

$$X_5 = (70, 50, 70, 50, 50)$$

$$X_6 - X_5 = (-20, +20, -20, +20, +20)$$

$$S_6 - S_5 = -20w_1 + 20w_2 - 20w_3 + 20w_4 + 20w_5$$

$$\Delta S_{65} = -20(0.30) + 20(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = -6 + 5 - 3 + 3 + 3 = 2$$

Criteriile care avantajează M5 sunt: C1:-20; C3:-20

Criteriile care avantajează M6 sunt: C2:+20; C4:+20; C5:+20

Transferul minim poate fi făcut de la oricare dintre criteriile care avantajează M6 către oricare dintre criteriile care avantajează M5, deoarece coeficienții au aceeași valoare absolută: +20

$$20 - (-20) = 40$$

Pentru: C2→C3

Condiția de frontieră este:

$$2.00 - 40t = 0, t = 0.05$$

$$w_2^* = 0.25 - 0.05 = 0.20$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.05 = 0.20$$

iar celelalte ponderi rămân:

$$w_1^* = 0.30; w_4^* = 0.15; w_5^* = 0.15$$

$$S_6(W^*) = S_5(W^*) \approx 60.00$$

Rezultă profilul de frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.20, 0.20, 0.15, 0.15) = 1$$

$$\Delta W = (0, -0.05, +0.05, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.10$$

$$R = \frac{1}{2} 0.10 = 0.05$$

5 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C2 – performanță asupra mobilității către C3 – fezabilitate tehnică.

### 11. Perechea M6 – M4

Vectorii de performanță sunt:

$$X6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

$$X4 = (50, 70, 70, 50, 50)$$

$$X6 - X4 = (0, 0, -20, +20, +20)$$

$$S6 - S4 = -20w_3 + 20w_4 + 20w_5$$

$$\Delta S64 = 0(0.30) + 0(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = 0 + 0 - 3 + 3 + 3 = 3.00$$

M6 > M4 cu 3 puncte

C3 avantajează M4: C3: -20

C4 și C5 avantajează M6: C4: +20; C5: +20

Transferul minim poate fi făcut de la C4 sau C5 către C3. Alegem: C4 → C3

Fiecare unitate de pondere transferată reduce diferența cu:

$$20 - (-20) = 40$$

Condiția de frontieră este:

$$3.00 - 40t = 0, t = 0.075$$

$$w_4^* = 0.15 - 0.075$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.075 = 0.225$$

$$w_1^* = 0.30$$

$$w_2^* = 0.25$$

$$w_5^* = 0.15$$

$$W^* = (0.30, 0.25, 0.225, 0.075, 0.15) = 1$$

$$S_6(W^*) = S_4(W^*) \approx 59.50$$

$$\Delta W = (0, 0, +0.075, -0.075, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.15$$

$$R = \frac{1}{2} 0.15 = 0.075$$

### 12. Perechea M6 – M1

Vectorii de performanță sunt:

$$X6 = (50, 70, 50, 70, 70)$$

$$X1 = (50, 50, 70, 50, 50)$$

$$X6 - X1 = (0, +20, -20, +20, +20)$$

$$S6 - S1 = 20w_2 - 20w_3 + 20w_4 + 20w_5$$

$$\Delta S61 = 0(0.30) + 20(0.25) - 20(0.15) + 20(0.15) + 20(0.15) = 0 + 5 - 3 + 3 + 3 = 8.00$$

C3 este criteriul care avantajează M1: C3: -20

Criteriile care avantajează M6 sunt: C2: +20; C4: +20; C5: +20

Transferul minim poate fi realizat de la oricare dintre C2, C4 sau C5 către C3, deoarece toate cele trei criterii au același coeficient: +20

Alegem transferul: C2 → C3

Fiecare unitate de pondere transferată reduce diferența cu:

$$20 - (-20) = 40$$

Condiția de frontieră devine:

$$8.00 - 40t = 0, t = 0.20$$

$$w_2^* = 0.25 - 0.20 = 0.05$$

$$w_3^* = 0.15 + 0.20 = 0.35$$

$$w_1^* = 0.30$$

$$w_4^* = 0.15$$

$$w_5^* = 0.15$$

$$W^* = (0.30, 0.05, 0.35, 0.15, 0.15) = 1$$

$$S_6(W^*) = S_1(W^*) \approx 57.00$$

$$\Delta W = (0, -0.20, +0.20, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.40$$

$$R = \frac{1}{2} 0.40 = 0.20$$

### 13. Perechea M5 – M4

Vectorii de performanță sunt:

$$X5 = (70, 50, 70, 50, 50)$$

$$X4 = (50,70,70,50,50)$$

$$X5-X4 = (+20,-20,0,0,0)$$

$$S5-S4 = 20w_1-20w_2$$

$$\Delta S54 = 20(0.30)-20(0.25) = 6-5 = 1.00$$

M5>M4 cu 1.00 puncte

C1 avantajează M5: C1:+20

C2 avantajează M4: C2:-20

Fiecare unitate de pondere transferată reduce diferența dintre scoruri cu:

$$20-(-20) = 40$$

Condiția de frontieră este:

$$1.00-40t = 0, t = 0.025$$

$$w_1^* = 0.30 - 0.025 = 0.275$$

$$w_2^* = 0.25 + 0.025 = 0.275$$

$$w_3^* = 0.15$$

$$w_4^* = 0.15$$

$$w_5^* = 0.15$$

$$W^* = (0.275; 0.275; 0.15; 0.15; 0.15) = 1$$

$$S_5(W^*) = S_4(W^*) = 58.50$$

$$\Delta W = (-0.025, +0.025, 0, 0, 0)$$

$$\|W^*-W\|_1 = 0.05$$

$$R = \frac{1}{2} 0.05 = 0.025$$

2,5 puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C1 – performanță climatică către C2 – performanță asupra mobilității.

#### **14. Perechea M5 – M1**

Vectorii de performanță sunt:

$$X5 = (70,50,70,50,50)$$

$$X1 = (50,50,70,50,50)$$

$$X5-X1 = (+20,0,0,0,0)$$

$$S5-S1 = 20w_1$$

$$\Delta S51 = 20(0.30)=6$$

M5>M1 cu 6 puncte

Singurul criteriu care diferențiază cele două măsuri este C1: C1:+20

Prin urmare, condiția de frontieră este:  $20w_1^* = 0$

$$w_1^* = 0$$

$$t = 0.30$$

Deoarece C2, C3, C4 și C5 nu diferențiază M5 și M1, redistribuirea poate fi făcută către oricare dintre ele fără să afecteze egalitatea.

$$w_1^* = 0.30 - 0.30 = 0$$

$$w_2^* = 0.25 + 0.30 = 0.55$$

$$w_3^* = 0.15$$

$$w_4^* = 0.15$$

$$w_5^* = 0.15$$

$$W^* = (0, 0.55, 0.15, 0.15, 0.15) = 1$$

$$S_5(W^*) = S_1(W^*) = 53.00$$

$$\Delta W = (-0.30, +0.30, 0, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.60$$

$$R = \frac{1}{2} 0.60 = 0.30$$

30 de puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C1 – performanță climatică către C2 – performanță asupra mobilității.

#### **15. Perechea M4 – M1**

Vectorii de performanță sunt:

$$X_4 = (50, 70, 70, 50, 50)$$

$$X_1 = (50, 50, 70, 50, 50)$$

$$X_4 - X_1 = (0, +20, 0, 0, 0)$$

$$S_4 - S_1 = 20w_2$$

$$\Delta S_{41} = 20(0.25) = 5.00$$

M4 > M1 cu 5 puncte

Pentru a ajunge la frontieră trebuie să reducem diferența:  $5.00 \rightarrow 0$

Singurul criteriu care diferențiază cele două măsuri este C2: C2: +20

Prin urmare, condiția de frontieră este:  $20w_2^* = 0$

Inițial:  $w_2 = 0.25$ , deci întreaga pondere a lui C2 trebuie redistribuită către unul sau mai multe dintre celelalte criterii:

$$t = 0.25$$

Deoarece C1, C3, C4 și C5 nu diferențiază M4 și M1, redistribuirea poate fi făcută către oricare dintre ele fără să afecteze egalitatea.

Alegem, de exemplu, transferul integral:  $C2 \rightarrow C1$

$$w_2^* = 0.25 - 0.25 = 0$$

$$w_1^* = 0.30 + 0.25 = 0.55$$

$$w_3^* = 0.15$$

$$w_4^* = 0.15$$

$$w_5^* = 0.15$$

$$W^* = (0.55, 0, 0.15, 0.15, 0.15) = 1$$

$$S_4(W^*) = S_1(W^*) = 53.00$$

$$\Delta W = (+0.25, -0.25, 0, 0, 0)$$

$$\|W^* - W\|_1 = 0.50$$

$$R = \frac{1}{2} 0.50 = 0.25$$

25 de puncte procentuale din pondere sunt transferate de la C2 – performanță asupra mobilității către C1 – performanță climatică.

Și aici, ca la M5–M1, inversarea strictă nu este posibilă doar prin modificarea ponderilor nenegative, deoarece:

$$S4 - S1 = 20w_2$$

iar:

$$w_2 \geq 0$$

deci:

$$S4 \geq S1$$

Putem obține doar egalitatea prin:

$$w_2 = 0$$

dar niciodată:

$$M1 > M4$$

în condițiile actuale ale modelului.

Sinteza profilelor de frontieră  $W^*$

| Pereche | $W^*$                                |
|---------|--------------------------------------|
| M2–M3   | (0.45, 0.25, 0.15, 0, 0.15)          |
| M2–M6   | (0, 0, 0.15, 0.70, 0.15)             |
| M2–M5   | (0.30, 0.03636, 0.36364, 0.15, 0.15) |
| M2–M4   | (0, 0.25, 0.46875, 0.13125, 0.15)    |
| M2–M1   | (0.20, 0, 0.50, 0.15, 0.15)          |

|       |                                      |
|-------|--------------------------------------|
| M3–M6 | (0.21818, 0.25, 0.15, 0.23182, 0.15) |
| M3–M5 | (0.30, 0.13182, 0.26818, 0.15, 0.15) |
| M3–M4 | (0.11250, 0.25, 0.33750, 0.15, 0.15) |
| M3–M1 | (0.30, 0.02273, 0.37727, 0.15, 0.15) |
| M6–M5 | (0.30, 0.20, 0.20, 0.15, 0.15)       |
| M6–M4 | (0.30, 0.25, 0.225, 0.075, 0.15)     |
| M6–M1 | (0.30, 0.05, 0.35, 0.15, 0.15)       |
| M5–M4 | (0.275, 0.275, 0.15, 0.15, 0.15)     |
| M5–M1 | (0, 0.55, 0.15, 0.15, 0.15)          |
| M4–M1 | (0.55, 0, 0.15, 0.15, 0.15)          |

#### Sinteza rezultatelor

| Pereche      | $\Delta W = W^* - W$             | $L_1$          | Pondere redistribuită |
|--------------|----------------------------------|----------------|-----------------------|
| M2–M3        | (+, .15, 0, 0, −.150)            | 0.30000        | 0.15000               |
| M2–M6        | (−, .30, −, .25, 0 + .550)       | 1.10000        | 0.55000               |
| M2–M5        | (0, −, .21364, +, .2136400)      | 0.42727        | 0.21364               |
| M2–M4        | (−, .30, 0, +, .31875 − .018750) | 0.63750        | 0.31875               |
| M2–M1        | (−, .10, −, .25, +.3500)         | 0.70000        | 0.35000               |
| M3–M6        | (−, .08182, 0, 0, +.081820)      | 0.16364        | 0.08182               |
| M3–M5        | (0, −, .11818, +, .1181800)      | 0.23636        | 0.11818               |
| M3–M4        | (−, .18750, 0, +, .1875000)      | 0.37500        | 0.18750               |
| M3–M1        | (0, −, .22727, +, .2272700)      | 0.45455        | 0.22727               |
| M6–M5        | (0, −, .05, +, .0500)            | 0.10000        | 0.05000               |
| M6–M4        | (0, 0, +, .075, −.0750)          | 0.15000        | 0.07500               |
| M6–M1        | (0, −, .20, +, .2000)            | 0.40000        | 0.20000               |
| <b>M5–M4</b> | <b>(−, .025, +, .025, 000)</b>   | <b>0.05000</b> | <b>0.02500</b>        |
| M5–M1        | (−, .30, +, .30, 000)            | 0.60000        | 0.30000               |
| M4–M1        | (+, .25, −, .25, 000)            | 0.50000        | 0.25000               |

Rezultatul cel mai apropiat de profilul inițial este: M5 – M4 cu  $\|W^* - W\|_1 = 0.05$  și o pondere redistribuită de 0.025.

### 9.3. Construirea profilului contrafactual $W'$

Pentru fiecare pereche pentru care inversarea este posibilă pornim de la:

$$S_a(W^*) = S_b(W^*)$$

și deplasăm profilul foarte puțin dincolo de frontieră, astfel încât:

$$S_b(W') \geq S_b(W') + \varepsilon$$

Utilizăm toleranța stabilită în metodologie:

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

#### 1. $M2 - M3$ ( $M2 > M3$ )

La frontieră:

$$S_2 - S_3 = 35w_4^* = 0$$

pentru inversare  $S_3 > S_2$ :

$$35w_4' < 0 \rightarrow w_4' < 0$$

condiția este:

$$w_j' \geq 0$$

prin urmare:

nu există profil valid  $W'$  care să producă  $M_3 > M_2$

#### 2. $M2 - M6$ ( $M2 > M6$ )

Diferența este:

$$S_2 - S_6 = 20w_1 + 15w_2 = 0$$

la frontieră:

$$w_1' = w_2' = 0$$

pentru  $M_6 > M_2$  ar trebui:

$$20w_1' + 15w_2' < 0$$

imposibil pentru ponderi pozitive

inversarea  $M_6 > M_2$  este imposibilă

#### 3. $M2 - M5$ ( $M2 > M5$ )

La frontieră am obținut:

$$W^* = (0.30, 0.0363636, 0.3636364, 0.15, 0.15)$$

O unitate suplimentară de pondere transferată reduce  $S_2 - S_5$  cu:  $35 - (-20) = 55$

Pentru a trece frontiera cu  $\varepsilon$ :

$$55\eta = \varepsilon$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{55} = \frac{10^{-6}}{55} \approx 1.81818 \times 10^{-8}$$

prin urmare:

$$W' = (0.30, 0.0363636 - \frac{\varepsilon}{55}, 0.3636364 + \frac{\varepsilon}{55}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_5(W') - S_2(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M5 > M2$$

### 3. $M2 - M4$ ( $M2 > M4$ )

La frontieră am obținut:

$$W^* = (0, 0.25, 0.46875, 0.13125, 0.15)$$

pentru transferul  $C4 \rightarrow C3$ , efectul unei unități transferate este:  $20 - (-20) = 40$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0, 0.25, 0.46875 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.13125 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.15)$$

și:

$$S_4(W') - S_2(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M4 > M2$$

### 5. $M2 - M1$ ( $M2 > M1$ )

La frontieră:

$$W^* = (0.20, 0, 0.50, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C1 \rightarrow C3$ , efectul unei unități transferate este:  $20 - (-20) = 40$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.20 - \frac{\varepsilon}{40}, 0, 0.50 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_1(W') - S_2(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M1 > M2$$

#### 6. $M3 - M6$ ( $M3 > M6$ )

La frontieră:

$$W^* = (0.2181818, 0.25, 0.15, 0.2318182, 0.15)$$

pentru transferul  $C1 \rightarrow C4$ , efectul unei unități transferate este:  $20 - (-35) = 55$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{55} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 1.818 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.2181818 - \frac{\varepsilon}{55}, 0.25, 0.15, 0.2318182 + \frac{\varepsilon}{55}, 0.15)$$

și:

$$S_6(W') - S_3(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M6 > M3$$

#### 7. $M3 - M5$ ( $M3 > M5$ )

La frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.1318182, 0.2681818, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C2 \rightarrow C3$ , efectul unei unități transferate este:  $20 - (-35) = 55$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{55} = \frac{10^{-6}}{55} \approx 1.818 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.30, 0.1318182 - \frac{\varepsilon}{55}, 0.2681818 + \frac{\varepsilon}{55}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_5(W') - S_3(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M5 > M3$$

#### 8. $M3 - M4$ ( $M3 > M4$ )

La frontieră:

$$W^* = (0.1125, 0.25, 0.3375, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C1 \rightarrow C3$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.1125 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.25, 0.3375 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_4(W') - S_3(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M4 > M3$$

### **9. $M3 - M1$ ( $M3 > M1$ )**

La frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.0227273, 0.3772727, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C2 \rightarrow C3$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{55} = \frac{10^{-6}}{55} \approx 1.818 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.30, 0.0227273 - \frac{\varepsilon}{55}, 0.3772727 + \frac{\varepsilon}{55}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_1(W') - S_3(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M1 > M3$$

### **10. $M6 - M5$ ( $M6 > M5$ )**

La frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.20, 0.20, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C2 \rightarrow C3$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.30, 0.20 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.20 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_5(W') - S_6(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M5 > M6$$

### **11. $M6 - M4$ ( $M6 > M4$ )**

La frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.25, 0.225, 0.075, 0.15)$$

pentru transferul  $C4 \rightarrow C3$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.30, 0.25, 0.225 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.075 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.15)$$

și:

$$S_4(W') - S_6(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M4 > M6$$

### **12. $M6 - M1$ ( $M6 > M1$ )**

La frontieră:

$$W^* = (0.30, 0.05, 0.35, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C2 \rightarrow C3$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.30, 0.05 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.35 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_1(W') - S_6(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M1 > M6$$

**13.  $M5 - M4$  ( $M6 > M1$ )**

La frontieră:

$$W^* = (0.275, 0.275, 0.15, 0.15, 0.15)$$

pentru transferul  $C1 \rightarrow C2$ ,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{40} = \frac{10^{-6}}{40} \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

profilul contrafactual este:

$$W' = (0.275 - \frac{\varepsilon}{40}, 0.275 + \frac{\varepsilon}{40}, 0.15, 0.15, 0.15)$$

și:

$$S_4(W') - S_5(W') = \varepsilon$$

rezultă:

$$M4 > M5$$

**14.  $M5 - M1$  ( $M5 > M1$ )**

avem:

$$S_5 - S_1 = 20w_1$$

La frontieră:

$$35w_1^* = 0$$

pentru inversare  $M_5 > M_1$

$$w_1' < 0$$

condiția este:

$$w_j' \geq 0$$

prin urmare:

$$\boxed{\text{inversarea } M_1 > M_5 \text{ este imposibilă}}$$

**15.  $M4 - M1$  ( $M5 > M1$ )**

avem:

$$S_4 - S_1 = 20w_2$$

La frontieră:

$$20w_2^* = 0$$

pentru inversare  $M_1 > M_4$

$$w'_2 < 0$$

condiția este:

$$w'_j \geq 0$$

prin urmare:

inversarea  $M_1 > M_4$  este imposibilă

| Relația inițială | Relația contrafactuală | Situație          |
|------------------|------------------------|-------------------|
| $M2 > M3$        | $M3 > M2$              | <b>imposibilă</b> |
| $M2 > M6$        | $M6 > M2$              | <b>imposibilă</b> |
| $M2 > M5$        | $M5 > M2$              | posibilă          |
| $M2 > M4$        | $M4 > M2$              | posibilă          |
| $M2 > M1$        | $M1 > M2$              | posibilă          |
| $M3 > M6$        | $M6 > M3$              | posibilă          |
| $M3 > M5$        | $M5 > M3$              | posibilă          |
| $M3 > M4$        | $M4 > M3$              | posibilă          |
| $M3 > M1$        | $M1 > M3$              | posibilă          |
| $M6 > M5$        | $M5 > M6$              | posibilă          |
| $M6 > M4$        | $M4 > M6$              | posibilă          |
| $M6 > M1$        | $M1 > M6$              | posibilă          |
| $M5 > M4$        | $M4 > M5$              | posibilă          |
| $M5 > M1$        | $M1 > M5$              | <b>imposibilă</b> |
| $M4 > M1$        | $M1 > M4$              | <b>imposibilă</b> |

Prin urmare:

11/15 relații permit o inversare strictă

4/15 relații permit cel mult egalitatea

