

Metodologia de proiectare a experimentului

1. Scopul experimentului

Scopul experimentului este testarea fezabilității unui mecanism reproductibil pentru explicarea și verificarea clasamentelor multicriteriale utilizate în ierarhizarea măsurilor de mobilitate urbană.

Fluxul analizat: performanțe ale măsurilor → ponderi ale criteriilor → ierarhizare MCDA → clasament → explicația rezultatului → modificare contrafactuală → recalculare → verificarea explicației

Experimentul pornește de la un set controlat de alternative de mobilitate urbană, reprezentate prin valori sintetice ale performanței pe criterii climatice, de mobilitate, tehnice, economice și sociale. Aceste valori constituie baza cantitativă a ierarhizării și sunt menținute distinct față de ponderile criteriilor, care reprezintă preferințele aplicate procesului decizional. Separarea între performanță și pondere permite identificarea contribuției fiecărui criteriu la poziția unei alternative în clasament.

Experimentul urmărește patru întrebări principale de cercetare:

1. Poate fi implementat un lanț de calcul reproductibil în care aceeași matrice criteriu–performanță și același profil de ponderi produc același clasament la rulări repetate?
2. Poate fi explicată diferența de poziție dintre două alternative prin descompunerea contribuțiilor criteriilor la scorurile agregate?
3. Poate fi identificată o modificare minimă a ponderilor criteriilor care produce o schimbare specificată a relației de ordine dintre două alternative?
4. Poate fi verificată cantitativ explicația contrafactuală prin aplicarea modificării identificate și recalcularea clasamentului?

Întrebarea centrală a experimentului este:

Poate fi explicată și verificată cantitativ schimbarea relației de ordine dintre două măsuri într-un clasament multicriterial prin identificarea unei modificări contrafactice minime a ponderilor criteriilor și recalcularea rezultatului?

Experimentul are caracter de fezabilitate metodologică și nu urmărește să demonstreze acuratețea estimărilor climatice, validitatea empirică a performanțelor atribuite măsurilor sau utilitatea operațională a unui sistem de suport decizional. Valorile utilizate pentru performanțele alternativelor sunt sintetice și sunt folosite exclusiv pentru controlul condițiilor experimentale.

Rezultatul urmărit este demonstrarea faptului că mecanismul propus poate fi formulat matematic, implementat reproductibil și verificat prin recalculare. Rezultatele cantitative privind fidelitatea explicațiilor, sensibilitatea sau stabilitatea clasamentului vor fi raportate numai după executarea experimentului și nu sunt presupuse în această etapă.

2. Definirea intervențiilor de mobilitate urbană

Măsurile analizate în experiment reprezintă tipuri de intervenții consacrate în planificarea mobilității urbane durabile. Selecția lor pornește de la cadrul european privind Sustainable Urban Mobility Plans (SUMP), Urban Vehicle Access Regulations (UVAR), mobilitatea activă, transportul public și tranziția către mobilitate cu emisii reduse sau zero.

Cadrul principal de referință este reprezentat de Guidelines for Developing and Implementing a Sustainable Urban Mobility Plan, Third Edition (2026), elaborate la nivelul Comisiei Europene pentru sprijinirea autorităților locale în planificarea și implementarea mobilității urbane durabile. Ghidurile SUMP tratează planificarea integrată a diferitelor moduri și intervenții de transport și constituie cadrul european actual pentru selectarea și evaluarea măsurilor de mobilitate urbană.

Selecția alternativelor urmărește să acopere tipuri diferite de intervenție, astfel încât experimentul multicriterial să nu compare exclusiv măsuri din aceeași categorie. Sunt reprezentate măsuri de reglementare a accesului auto, mobilitate activă, transport public, management inteligent al traficului, infrastructură pentru mobilitate electrică și reorganizarea spațiului urban în favoarea deplasărilor pietonale. Această diversitate este compatibilă cu abordarea integrată promovată de European Urban Mobility Framework, care urmărește sisteme urbane de transport sigure, accesibile, incluzive,

inteligente, reziliente și cu emisii reduse sau zero și acordă un rol important transportului public, mobilității active și soluțiilor digitale.

Tabel 1 – cele Șase măsuri selectate

Cod	Măsură	Descriere sintetică	Fundamentarea includerii
M1	Low-Emission Zone (LEZ) → Zonă cu emisii reduse	Restricționarea accesului într-o zonă urbană pentru vehiculele care nu îndeplinesc anumite cerințe privind emisiile.	Low- and zero-emission zones sunt forme consacrate de Urban Vehicle Access Regulations (UVAR). Comisia Europeană indică UVAR ca instrumente pentru reducerea emisiilor generate de trafic, a congestiei și pentru îmbunătățirea siguranței; LEZ și ZEZ reprezintă majoritatea schemelor UVAR implementate în Europa.
M2	Cycling infrastructure → Infrastructură pentru deplasarea cu bicicleta	Dezvoltarea sau îmbunătățirea infrastructurii dedicate deplasărilor cu bicicleta, inclusiv trasee și conexiuni sigure.	Ciclismul este una dintre componentele centrale ale mobilității active promovate la nivel european. Ediția 2026 a ghidurilor SUMP este însoțită de un document de referință dedicat integrării ciclismului în procesul SUMP, iar European Urban Mobility Framework urmărește creșterea ponderii mobilității active.
M3	Public-transport frequency improvement → Creșterea frecvenței transportului public	Creșterea frecvenței și implicit a disponibilității serviciilor de transport public existente.	Transportul public este identificat de cadrul european ca element central al tranziției către mobilitate urbană sustenabilă și neutră climatic. Politica europeană urmărește creșterea ponderii transportului public și îmbunătățirea atractivității acestuia în raport cu automobilul individual.
M4	Traffic-management optimisation → Optimizarea managementului traficului	Utilizarea măsurilor de management și control al traficului pentru reducerea congestiei și îmbunătățirea funcționării rețelei urbane.	Cadrul european de mobilitate urbană tratează congestionarea ca una dintre problemele majore ale orașelor și promovează soluții inteligente și digitale pentru gestionarea mobilității și utilizarea mai eficientă a infrastructurii existente.
M5	EV-charging infrastructure → Infrastructură de încărcare pentru vehicule electrice	Dezvoltarea infrastructurii de încărcare necesare utilizării vehiculelor electrice în mediul urban.	Tranziția către mobilitate cu emisii zero este una dintre direcțiile explicite ale politicii europene de mobilitate urbană. Infrastructura necesară vehiculelor cu emisii zero reprezintă o componentă tehnologică distinctă față de măsurile de schimbare modală sau de management al traficului.
M6	Pedestrian-priority areas → Extinderea zonelor pietonale	Restricționarea sau eliminarea traficului auto din anumite spații urbane și ierarhizarea	Zonele pietonale sunt incluse explicit de Comisia Europeană între formele de UVAR, iar mersul pe jos este tratat în materialele SUMP ca element fundamental al mobilității active și al creării unor spații urbane mai sănătoase și mai eficiente.

		deplasărilor pietonale.	
--	--	-------------------------	--

3. Definirea dimensiunilor și criteriilor de evaluare

Evaluarea multicriterială a măsurilor de mobilitate urbană va utiliza o structură ierarhică formată din cinci dimensiuni principale de evaluare, climatică, mobilitate, tehnică, economică și socială, fiecare reprezentată prin unul sau mai multe criterii măsurabile.

Alegerea unei structuri multidimensionale este justificată de caracterul complex al deciziilor privind mobilitatea urbană. Evaluarea unei măsuri exclusiv prin reducerea emisiilor nu este suficientă pentru ierarhizare, deoarece măsurile diferă simultan prin efectele asupra funcționării sistemului de transport, fezabilitatea implementării, resursele necesare și efectele asupra populației. Cadrul european SUMP promovează în mod explicit o abordare integrată a mobilității urbane, iar literatura Joint Research Centre (JRC) privind indicatorii de transport sustenabil evidențiază necesitatea evaluării performanței transportului prin seturi complementare de indicatori, nu printr-un singur rezultat.

Dimensiune → criteriu agregat → indicatori potențiali

De exemplu:

- Dimensiune: Climatică
- Criteriu experimental: Performanța climatică
- Indicatori potențiali în sistemul complet: reducerea emisiilor GHG, consum energetic etc.

Pentru experimentul preliminar se adoptă următoarea structură:

Cod	Dimensiune	Criteriu experimental	Semnificație	Sens
C1	Climatică	Performanța climatică	Capacitatea măsurii de a contribui la reducerea impactului climatic asociat mobilității urbane	max
C2	Mobilitate	Performanța asupra mobilității	Contribuția măsurii la îmbunătățirea funcționării sistemului de mobilitate și la orientarea către moduri de transport mai sustenabile	max
C3	Tehnică	Fezabilitatea tehnică	Gradul în care măsura poate fi implementată utilizând infrastructura, tehnologiile și capacitățile tehnice disponibile	max
C4	Economică	Performanța economică	Caracterul favorabil al măsurii din perspectiva resurselor necesare pentru implementare și operare	max
C5	Socială	Performanța socială	Caracterul favorabil al efectelor măsurii asupra accesibilității, acceptabilității și distribuției beneficiilor sau dezavantajelor între utilizatori	max

C1. Performanța climatică

În cadrul experimentului preliminar, dimensiunea climatică este reprezentată prin criteriul agregat „performanța climatică”, care exprimă caracterul favorabil al contribuției unei măsuri la reducerea impactului climatic al mobilității urbane. Într-o implementare, această dimensiune poate fi reprezentată prin indicatori precum reducerea emisiilor de gaze cu efect de seră și modificarea consumului energetic. Importanța acestei dimensiuni este direct legată de obiectivele europene privind decarbonizarea transportului și de rolul mobilității urbane în atingerea neutralității climatice. Cadrul european pentru

mobilitate urbană identifică reducerea emisiilor de transport, electrificarea, transportul public și mobilitatea activă printre direcțiile principale de transformare.

În experimentul preliminar, pentru a evita introducerea prematură a mai multor indicatori și a unei ponderări interne suplimentare, dimensiunea va fi reprezentată printr-un scor sintetic de performanță climatică, normalizat pe intervalul 0–100. Interpretare: 0 indică o performanță climatică foarte redusă, iar 100 o performanță climatică foarte ridicată. Sens: maximizare.

C2. Performanța asupra mobilității

Dimensiunea mobilității este reprezentată prin criteriul agregat „performanța asupra mobilității”, care exprimă caracterul favorabil al contribuției unei măsuri la funcționarea sistemului urban de transport și la orientarea acestuia către forme de mobilitate mai sustenabile. Această dimensiune poate fi reprezentată prin indicatori precum modificarea distribuției modale, reducerea congestiei, creșterea utilizării transportului public sau dezvoltarea mobilității active. Importanța acestei dimensiuni rezultă din rolul central pe care politicile europene de mobilitate urbană îl acordă reducerii dependenței de automobilul individual, creșterii ponderii transportului public și mobilității active și îmbunătățirii eficienței sistemelor urbane de transport.

În experimentul preliminar, pentru a evita introducerea prematură a mai multor indicatori și a unei ponderări interne suplimentare, dimensiunea va fi reprezentată printr-un scor sintetic de performanță asupra mobilității, normalizat pe intervalul 0–100. Interpretare: 0 indică o performanță foarte redusă asupra mobilității urbane, iar 100 o performanță foarte ridicată. Sens: maximizare.

C3. Fezabilitatea tehnică

Dimensiunea tehnică este reprezentată prin criteriul agregat „fezabilitatea tehnică”, care exprimă gradul în care o măsură poate fi implementată în condiții tehnice realiste, ținând seama de infrastructura necesară, complexitatea tehnologică, compatibilitatea cu sistemele existente și dificultatea operațională. Într-o implementare, această dimensiune poate fi reprezentată prin indicatori precum nivelul intervențiilor asupra infrastructurii existente, necesarul de tehnologii sau echipamente suplimentare, complexitatea integrării cu sistemele existente și cerințele de operare și mentenanță. Importanța acestei dimensiuni rezultă din necesitatea ca măsurile selectate în procesul de planificare a mobilității să fie eficiente din perspectiva efectelor estimate și implementabile în condițiile tehnice disponibile.

În experimentul preliminar, dimensiunea va fi reprezentată printr-un scor sintetic de fezabilitate tehnică, normalizat pe intervalul 0–100. Interpretare: 0 indică o fezabilitate tehnică foarte redusă, asociată unei complexități ridicate de implementare, iar 100 o fezabilitate tehnică foarte ridicată. Sens: maximizare.

C4. Performanța economică

Dimensiunea economică este reprezentată prin criteriul agregat „performanța economică”, care exprimă caracterul favorabil al unei măsuri din perspectiva resurselor necesare pentru implementare și operare. Această dimensiune poate fi reprezentată prin indicatori precum costul investiției inițiale, costurile de operare și întreținere, necesarul de finanțare sau raportul dintre costuri și efectele estimate. Importanța acestei dimensiuni este legată de necesitatea utilizării eficiente a resurselor publice și de compararea unor măsuri care pot produce efecte similare prin niveluri diferite de investiție și costuri de funcționare.

Dimensiunea va fi reprezentată printr-un scor sintetic de performanță economică, normalizat pe intervalul 0–100. Scorul este definit astfel încât o valoare mai mare să reprezinte o situație economică mai favorabilă. Interpretare: 0 indică o performanță economică foarte redusă, asociată unor cerințe ridicate de resurse, iar 100 o performanță economică foarte ridicată. Sens: maximizare.

C5. Performanța socială

Dimensiunea socială este reprezentată prin criteriul agregat „performanța socială”, care exprimă caracterul favorabil al efectelor unei măsuri asupra utilizatorilor sistemului de mobilitate și asupra distribuției beneficiilor și dezavantajelor între diferite categorii de populație. Într-o implementare, această dimensiune poate fi reprezentată prin indicatori precum accesibilitatea, echitatea, acceptabilitatea socială, siguranța sau efectele asupra grupurilor vulnerabile. Importanța acestei

dimensiuni rezultă din necesitatea ca tranziția către mobilitate sustenabilă să fie evaluată și prin consecințele asupra accesului la mobilitate și asupra diferitelor categorii de utilizatori.

Dimensiunea va fi reprezentată printr-un scor sintetic de performanță socială, normalizat pe intervalul 0–100. Interpretare: 0 indică o performanță socială foarte redusă, iar 100 o performanță socială foarte ridicată. Sens: maximizare.

Separarea performanțelor de ponderile criteriilor. În experiment, valorile de performanță asociate criteriilor C1–C5 descriu rezultatele atribuite fiecărei măsuri pe dimensiunile evaluate, în timp ce ponderile criteriilor exprimă importanța relativă acordată acestor dimensiuni. Cele două componente sunt definite și păstrate distinct pe întregul lanț de calcul. Modificarea ponderilor nu schimbă valorile de performanță ale măsurilor, ci numai contribuția relativă a criteriilor la scorul agregat și, implicit, la poziția acestora în clasament. Această separare permite identificarea ulterioară a măsurii în care poziția unei măsuri este determinată de performanțele sale sau de profilul de ponderi aplicat.

criterion-performance values = quantitative evidence
criterion weights = preferences
evidence + preferences → MCDA ranking

4. Construirea datasetului sintetic

Vom construi matricea de performanță:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{15} \\ \dots & & & \\ x_{61} & x_{62} & \dots & x_{65} \end{bmatrix}$$

adică:

$$6 \text{ măsuri} \times 5 \text{ criterii}$$

Valorile vor fi între 0 și 100.

Rezultat: prima matrice criteriu–performanță, plus justificarea fiecărei valori.

Scopul acestei etape este construirea unui set de date controlat care să descrie performanța celor șase măsuri de mobilitate pe criteriile C1–C5 și care va putea fi utilizat ulterior pentru calculul, explicarea și testarea stabilității clasamentului multicriterial.

Setul de date va avea caracter sintetic, ceea ce înseamnă că valorile numerice nu vor reprezenta rezultate măsurate și nici estimări. Ele vor fi construite exclusiv pentru experimentarea mecanismului metodologic de ierarhizare și explicare a clasamentului. Utilizarea datelor sintetice este adecvată într-un astfel de experiment atunci când obiectivul nu este validarea empirică a efectelor măsurilor, ci testarea comportamentului unei metode în condiții controlate. În cercetarea privind transportul urban, datele sintetice sunt utilizate tocmai pentru simularea unor situații variate atunci când date empirice complete nu sunt disponibile, cu condiția ca procesul de generare să fie explicit documentat și să urmărească menținerea unei plauzibilități suficiente a scenariilor analizate.

Matricea de performanță va avea următoarea formă:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} \end{bmatrix}$$

unde x_{ij} reprezintă performanța măsurii M_i în raport cu criteriul C_j .

Vor rezulta astfel 30 de valori de performanță, corespunzătoare combinației dintre șase măsuri și cinci criterii.

4.1. Principiul de construire a valorilor

Valorile nu vor fi atribuite prin simplă apreciere intuitivă și nu vor fi alese astfel încât să producă în mod artificial un anumit clasament. Construirea matricei va respecta trei niveluri distincte de fundamentare:

1. literatura și documentele de referință vor stabili sensul general și profilul plauzibil al fiecărei măsuri;
2. regulile experimentale definite anterior vor transforma aceste informații într-o structură comparabilă;
3. valorile sintetice 0 –100 vor reprezenta această structură într-o formă numerică utilizabilă de algoritmul MCDA.

Literatura poate susține faptul că o intervenție este în primul rând asociată reducerii emisiilor și gestionării accesului vehiculelor, în timp ce o măsură precum extinderea infrastructurii pentru biciclete are un profil diferit, cu efecte importante asupra mobilității active și accesibilității.

În limbajul planificării urbane, intervenție este termenul mai larg. O intervenție reprezintă o acțiune sau un ansamblu de acțiuni prin care se urmărește schimbarea sistemului de mobilitate. Poate include una sau mai multe măsuri.

Măsura este de regulă mai concretă și mai operațională: un instrument, o acțiune sau o soluție specifică pusă în aplicare.

De exemplu:

- Intervenție: reducerea utilizării autoturismului în centrul orașului.
- Măsuri: zonă cu emisii reduse, extinderea zonelor pietonale, taxare de acces, creșterea frecvenței transportului public.

4.2. Scala de evaluare

Toate valorile vor fi exprimate pe aceeași scală:

$$0 \leq x_{ij} \leq 100$$

Scorurile vor avea aceeași orientare:

valoare mai mare $\Rightarrow$ performanța mai favorabilă

Pentru interpretarea uniformă a scalei se poate utiliza următoarea convenție:

Interval	Interpretare
0–20	performanță foarte redusă în raport cu criteriul
21–40	performanță redusă
41–60	performanță moderată
61–80	performanță ridicată
81–100	performanță foarte ridicată

Intervalele au rol experimental și nu reprezintă standarde de evaluare a mobilității urbane.

Utilizarea unei scale comune elimină, în această etapă, necesitatea normalizării unor indicatori exprimați în unități diferite și permite concentrarea experimentului asupra problemei de interes: relația dintre performanțe, ponderi și clasamentul rezultat.

4.3. Profilul calitativ al măsurilor

Înainte de atribuirea valorilor numerice se va construi o *matrice calitativă de referință*. Pentru fiecare pereche măsură–criteriu se va stabili numai categoria generală de performanță: foarte redusă, redusă, moderată, ridicată sau foarte ridicată.

Structura va fi de forma:

Măsură	Climatic	Mobilitate	Tehnic	Economic	Social
M1 Zona cu emisii reduse	...	...	...	...	...
M2 Infrastructură pentru biciclete	...	...	...	...	...
M3 Creșterea frecvenței transportului public	...	...	...	...	...
M4 Optimizarea managementului traficului	...	...	...	...	...
M5 Infrastructură de încărcare EV	...	...	...	...	...
M6 Extinderea zonelor pietonale	...	...	...	...	...

- Fiecare calificativ va trebui justificat prin cel puțin una dintre următoarele categorii de surse:
- documente europene de politică și planificare a mobilității;
- ghiduri SUMP și documente metodologice asociate;
- rapoarte tehnice ale Comisiei Europene/JRC;
- articole științifice peer-reviewed privind efectele tipului respectiv de măsură.

Ghidurile SUMP reprezintă un reper solid pentru această etapă deoarece sunt destinate explicit planificării și implementării măsurilor de mobilitate urbană și sunt aliniate cu cadrul european de mobilitate urbană.

După stabilirea matricei calitative, categoriile vor fi transformate în intervale numerice.

O variantă inițială este:

Foarte redusă: [10,30]

Redusă: [25,45]

Moderată: [40,60]

Ridică: [55,80]

Foarte ridicată: [75,95]

Valorile exacte și suprapunerea intervalelor vor fi stabilite înainte de implementare. Folosirea unor intervale, în locul unor valori fixe de tip 20–40–60–80–100, are două avantaje. În primul rând, evită impresia că literatura oferă o precizie pe care în realitate nu o are. În al doilea rând, permite generarea mai multor instanțe experimentale păstrând același profil general al măsurilor. De exemplu, dacă performanța climatică a unei măsuri este clasificată „ridică”, experimentul poate utiliza o valoare din intervalul corespunzător, fără a pretinde că valoarea exactă are semnificație empirică.

4.5. Introducerea controlată a variației

Setul de date nu trebuie să producă un clasament trivial, în care o singură măsură este cea mai bună pe toate criteriile.

Pentru ca explicația multicriterială să fie relevantă, trebuie să existe compromisuri între criterii. Prin urmare, se vor aplica următoarele reguli:

- nicio măsură nu va avea performanța maximă pe toate criteriile;

- fiecare măsură va avea cel puțin un criteriu relativ favorabil și cel puțin unul mai puțin favorabil;
- vor exista măsuri cu profiluri contrastante;
- cel puțin două perechi de măsuri vor avea performanțe suficient de apropiate pentru ca modificarea ponderilor să poată produce inversări de rang;
- nu se va introduce o alternativă dominată evident pe toate criteriile, decât dacă aceasta este utilizată ulterior ca test de control.

În general MCDA este utilizată tocmai în situațiile în care alternativele prezintă performanțe diferite și potențial conflictuale între criterii.

4.6. Evitarea construirii unui rezultat prestabilit

O regulă metodologică esențială este că setul de date nu va fi ajustat ulterior pentru a obține un clasament considerat convenabil.

Ordinea corectă este: literatură → profil calitativ → reguli de generare → set de date → clasament

După fixarea matricei de performanță, aceasta nu va mai putea fi modificată pentru experimentul de bază. Orice set de date suplimentar utilizat ulterior pentru sensibilitate sau verificare va fi generat prin reguli documentate, fără modificarea retrospectivă a matricei inițiale.

4.7. Separarea setului de date de ponderile criteriilor

Matricea X va fi construită integral înainte de definirea profilurilor de ponderi.

X=valorile de performanță ale măsurilor

W=importanța relativă atribuită criteriilor

Cele două seturi de informații nu vor fi construite simultan. Această separare împiedică introducerea unei dependențe circulare în experiment. Performanțele unei măsuri nu trebuie modificate pentru a se adapta unui anumit profil de preferințe, iar ponderile nu trebuie alese pentru a confirma performanțele atribuite măsurilor.

4.8. Reproducibilitatea setului de date

Pentru ca experimentul să poată fi reprodus, fiecare valoare din matrice va avea asociate cel puțin următoarele informații:

Câmp	Conținut
Measure_ID	M1–M6
Criterion_ID	C1–C5
Performance_score	valoare 0–100
Qualitative_level	foarte redusă – foarte ridicată
Basis	justificarea profilului
Source	referința bibliografică relevantă
Data_type	synthetic
Generation_rule	regula prin care a fost stabilită valoarea

4.9. Controlul calității setului de date

Înainte ca matricea să fie utilizată în MCDA, vor fi realizate câteva verificări:

1. toate cele 30 de valori trebuie să aparțină intervalului 0–100;

2. toate criteriile trebuie să aibă aceeași orientare;
3. niciun câmp nu trebuie să fie lipsă;
4. fiecare valoare trebuie să fie asociată unei categorii calitative;
5. fiecare categorie calitativă trebuie să fie justificată;
6. trebuie să existe suficientă variație între măsuri;
7. trebuie verificată existența compromisurilor între criterii;
8. setul de date trebuie să fie independent de ponderile care vor fi definite în etapa următoare.

Numai după aceste verificări matricea va deveni setul de date de bază al experimentului.

4.10. Rezultatul

La finalul acestei etape vor exista trei rezultate distincte:

- matricea calitativă, fundamentată prin literatura de specialitate;
- regulile documentate de transformare a profilurilor calitative în valori sintetice 0 –100;
- matricea numerică criteriu–performanță 6×5 , utilizată ca intrare fixă pentru experimentul MCDA.

Matricea numerică va constitui baza calculului clasamentului, dar nu va conține încă nicio informație privind importanța criteriilor. Ponderile vor fi introduse separat în etapa următoare.

5. Definirea profilului de ponderi

Scopul acestei etape este definirea ponderilor asociate criteriilor C1–C5, care exprimă importanța relativă atribuită fiecărei dimensiuni de evaluare în procesul multicriterial.

În experiment, ponderile nu reprezintă performanțe și nu modifică valorile din matricea criteriu–performanță. Ele reprezintă exclusiv preferințele aplicate evaluării.

Formal, vectorul ponderilor este: $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$

unde:

$$w_j \geq 0$$

și:

$$\sum_{j=1}^5 w_j = 1$$

Astfel, fiecare pondere exprimă proporția din importanța totală atribuită criteriului respectiv.

5.1. Principiul separării dintre performanțe și ponderi

În experiment trebuie păstrată explicit relația:

X=valorile de performanță

și separat:

W = ponderile criteriilor

Matricea X este fixată înainte de introducerea ponderilor. Modificarea unui profil de ponderi nu schimbă performanțele măsurilor, ci numai influența relativă a criteriilor asupra scorului agregat și, implicit, asupra clasamentului.

5.2. Profilul de referință

Pentru experimentul de bază este necesar un singur profil de ponderi inițial, denumit profil de referință. Acesta trebuie stabilit înainte de calcularea clasamentului. Varianta pentru experiment va fi:

Criteriu	Pondere
C1 – Performanță climatică	0,30

C2 – Performanță asupra mobilității	0,25
C3 – Fezabilitate tehnică	0,15
C4 – Performanță economică	0,15
C5 – Performanță socială	0,15
Total	1,00

Vectorul este: $W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$

Acest profil acordă o importanță mai mare dimensiunilor climatică și de mobilitate, păstrând în același timp ponderi semnificative pentru criteriile tehnic, economic și social. Aceste valori reprezintă o configurație experimentală de referință.

5.3. Profile alternative

Pentru testarea influenței preferințelor asupra clasamentului, putem defini ulterior mai multe profiluri.

De exemplu:

Profil climatic: $W_{climatic} = (0.45, 0.20, 0.10, 0.10, 0.15)$

Profil orientat spre mobilitate: $W_{mobilitate} = (0.20, 0.40, 0.15, 0.10, 0.15)$

Profil orientat spre implementare: $W_{implementare} = (0.15, 0.15, 0.30, 0.30, 0.10)$

Profil social: $W_{social} = (0.20, 0.20, 0.10, 0.10, 0.40)$

Aceste profile nu trebuie interpretate ca reprezentând autorități, cetățeni sau experți reali, decât dacă ponderile sunt efectiv colectate de la aceștia. În experimentul preliminar ele vor fi descrise ca: synthetic preference profiles

5.4. Regula de independență față de rezultatul clasamentului

La fel ca în cazul datasetului sintetic, ponderile nu trebuie ajustate retrospectiv pentru a produce inversarea dorită. Profilul de referință trebuie fixat înainte de primul calcul.

Ordinea corectă este: definirea ponderilor → calcularea scorurilor → clasamentul

5.5. Controlul validității ponderilor

Înainte de utilizare, fiecare profil trebuie să respecte cel puțin următoarele condiții:

- toate ponderile sunt nenegative;
- suma ponderilor este egală cu 1;
- fiecare criteriu are o pondere explicită;
- profilul este documentat înainte de calcularea clasamentului;
- sursa profilului este precizată: experimentală, expertă sau stakeholder;
- profilurile sintetice nu sunt prezentate ca preferințe empirice.

La finalul acestei etape trebuie să avem:

- un profil de ponderi de referință, fixat înainte de calcularea clasamentului;
- regula matematică de validare a ponderilor;
- metadatele necesare pentru trasabilitatea profilului;
- opțional, mai multe profile sintetice alternative, utilizate ulterior pentru compararea clasamentelor;
- delimitarea explicită între ponderile experimentale și preferințele reale ale actorilor.

Observație importantă: pentru experimentul nostru, trebuie decis prin ce regulă justificăm profilul de referință. Putem fie să îl numim experimental reference profile, fie să folosim o metodă formală simplă pentru construirea lui.

6. Definirea matematică a clasamentului de bază

Scopul acestei etape este definirea formală a procedurii prin care valorile de performanță ale măsurilor și ponderile criteriilor sunt combinate pentru a produce un scor agregat și, ulterior, un clasament.

În experimentul preliminar, clasamentul de bază va fi calculat utilizând metoda de agregare multicriterială *Weighted Sum Model*.

6.1. Datele de intrare

Avem două elemente distincte.

Matricea criteriu–performanță: $X = (x_{ij})$ unde:

$i=1,\dots,6$ reprezintă măsurile;

$j=1,\dots,5$ reprezintă criteriile;

x_{ij} reprezintă performanța măsurii M_i în raport cu criteriul C_j .

Matricea are forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} \end{bmatrix}$$

și vectorul ponderilor:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$

cu condițiile:

$$w_j \geq 0$$

și:

$$\sum_{j=1}^5 w_j = 1$$

Matricea X și vectorul W sunt tratate separat până în momentul agregării.

6.2. Calcularea scorului agregat

Pentru fiecare măsură M , scorul agregat se calculează prin suma ponderată a performanțelor:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 w_j x_{ij}$$

Explicit:

$$S_i = w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + w_3 x_{i3} + w_4 x_{i4} + w_5 x_{i5}$$

De exemplu, pentru măsura M_1 :

$$S_1 = w_1 x_{11} + w_2 x_{12} + w_3 x_{13} + w_4 x_{14} + w_5 x_{15}$$

Același calcul se realizează pentru toate cele șase măsuri.

Rezultatul este vectorul scorurilor:

$$S=(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6)$$

6.3. Interpretarea scorului

Scorul agregat nu reprezintă o măsurare fizică și nu trebuie interpretat, de exemplu, ca procent de reducere a emisiilor sau ca valoare economică.

Scorul agregat reprezintă *un indice multicriterial compozit*, rezultat din combinarea performanțelor măsurii cu importanța relativă a criteriilor.

$$S_i = f(X_i, W)$$

Scorul exprimă poziționarea relativă a măsurii în configurația de evaluare analizată.

6.4. Construirea clasamentului

După calcularea scorurilor, măsurile sunt ordonate descrescător:

$$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_6$$

unde:

$S_{(1)}$ este cel mai mare scor;

$S_{(6)}$ este cel mai mic scor.

Prin urmare:

$$\text{Rank}(M_i) = 1$$

pentru măsura cu cel mai mare scor.

Clasamentul de bază va avea forma:

Rang	Măsură	Scor agregat
1	M?	...
2	M?	...
3	M?	...
4	M?	...
5	M?	...
6	M?	...

6.5. De ce alegem WSM ca metodă de bază

Pentru experimentul preliminar, WSM are câteva avantaje importante.

- În primul rând, este complet transparentă. Fiecare scor poate fi descompus exact:

$$S_i = w_1x_{i1} + \dots + w_5x_{i5}$$

- În al doilea rând, este deterministă. Pentru aceleași valori ale lui X și W, rezultatul este întotdeauna identic:

$$(X, W) \rightarrow S \rightarrow \text{Ranking}$$

- În al treilea rând, permite explicarea directă a contribuției fiecărui criteriu.
- În al patrulea rând, permite formularea matematică simplă a explicațiilor contrafactice, deoarece modificarea unei ponderi produce o modificare direct calculabilă a scorului.

6.6. Contribuția fiecărui criteriu la scor

Pentru fiecare criteriu definim:

$$c_{ij} = w_j x_{ij}$$

unde c_{ij} reprezintă contribuția criteriului C_j la scorul măsurii M_i .

Atunci:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 c_{ij}$$

De exemplu, dacă pentru o măsură avem:

$$S_i = 76$$

atunci putem avea:

$$76 = 24 + 18 + 12 + 10 + 12$$

și putem spune exact cât din scor provine din fiecare criteriu.

Aceasta este una dintre proprietățile care fac metoda potrivită pentru experimentul de explicabilitate.

6.7. Diferența dintre două măsuri

Pentru două măsuri M_a și M_b , diferența dintre scoruri este:

$$\Delta S_{ab} = S_a - S_b$$

Înlocuind formula scorurilor:

$$\Delta S_{ab} = \sum_{j=1}^5 w_j (x_{aj} - x_{bj})$$

Relația ne arată că diferența dintre două poziții în clasament poate fi explicată prin contribuțiile individuale ale criteriilor.

Pentru fiecare criteriu:

$$\Delta_{ab,j} = w_j (x_{aj} - x_{bj})$$

iar:

$$\Delta S_{ab} = \sum_{j=1}^5 \Delta_{ab,j}$$

Această relație va constitui baza matematică pentru explicarea diferenței dintre două măsuri.

6.8. Regula pentru egalități

Trebuie stabilită înainte de rularea experimentului și situația în care două măsuri obțin același scor.

Dacă:

$$S_a = S_b$$

Cele două măsuri vor primi același rang sau vor fi marcate explicit ca: tie / egalitate de scor.

Dacă ulterior analiza contrafactuală urmărește inversarea ordinii, egalitatea va fi tratată separat de inversarea propriu-zisă.

6.9. Precizia numerică

Calculule interne trebuie păstrate la precizia completă oferită de Python.

Rotunjirea va fi aplicată doar la afișare.

De exemplu, dacă:

$$S_1 = 73.4268$$

valoarea utilizată pentru comparare rămâne:

$$73.4268$$

chiar dacă în tabel afișăm:

$$73.43$$

Această regulă evită apariția unor egalități artificiale produse prin rotunjire.

6.10. Normalizarea

În experimentul preliminar, nu este necesară o normalizare suplimentară înainte de WSM, deoarece toate cele cinci criterii au fost deja definite pe aceeași scală: [0,100].

și au aceeași orientare: mai mare=mai favorabil.

Prin urmare:

$$x_{i,j}^{norm} = x_{i,j}$$

pentru experimentul de bază.

Aceasta este o simplificare deliberată. Într-un sistem complex, unde criteriile pot avea unități diferite, etapa de normalizare va fi necesară.

6.11. Reproductibilitatea clasamentului

Pentru a demonstra caracterul determinist al procedurii, experimentul va verifica:

$$\text{Ranking}(X,W) = \text{Ranking}(X,W)$$

la rulări repetate cu aceleași intrări.

Cu alte cuvinte, dacă matricea și ponderile sunt identice, scorurile și clasamentul trebuie să fie identice.

6.12. Clasamentul de bază trebuie păstrat ca referință

După calcularea sa, clasamentul de referință va fi păstrat ca rezultat experimental inițial:

$$R_0 = \text{Ranking}(X, W_{ref})$$

Dacă ulterior modificăm ponderile pentru analiza contrafactuală, vom obține un nou clasament:

$$R_1 = \text{Ranking}(X, W')$$

R_0 rămâne referința față de care verificăm schimbarea.

Rezultate

La sfârșitul acestei etape vom avea definite înainte de implementare:

$$X + W \rightarrow S \rightarrow \text{Ranking}$$

mai precis:

- formula scorului agregat;
- regula de ordonare;
- regula pentru egalități;
- precizia numerică;
- contribuția fiecărui criteriu la scor;
- formula diferenței dintre două măsuri;
- regula de reproductibilitate;
- clasamentul inițial R_0 , care va deveni referința pentru explicațiile și contrafactualurile ulterioare.

Observație: WSM este metoda de referință pentru experimentul explicabilității. Ulterior va fi introdusă a doua metodă și vom compara clasamentele, inclusiv prin Kendall's t.

7. Explicarea scorului

Scopul acestei etape este de a transforma scorul agregat al fiecărei măsuri dintr-o valoare numerică unică într-un rezultat decompozabil și interpretabil, prin identificarea contribuției fiecărui criteriu la scorul final.

Această etapă explică cum este construit scorul fiecărei măsuri. Explicația diferenței dintre două măsuri va fi tratată separat.

7.1. Descompunerea scorului agregat

Pentru măsura M_i , scorul agregat definit în secțiunea anterioară este:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 w_j x_{ij}$$

Pentru fiecare criteriu definim contribuția sa la scor:

$$C_{ij} = w_j x_{ij}$$

unde:

- x_{ij} este performanța măsurii M_i pe criteriul C_j ;
- w_j este ponderea criteriului C_j ;
- c_{ij} este contribuția criteriului C_j la scorul agregat al măsurii.

Rezultă:

$$S_i = C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + C_{i4} + C_{i5}$$

Scorul agregat reprezintă suma unor contribuții complet observabile.

Exemplu:

Presupunem, exclusiv pentru ilustrare, că o măsură are următoarele performanțe:

$$X_i = (90, 70, 50, 60, 80)$$

iar profilul de ponderi este:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

Contribuțiile devin:

$$c_{i1} = 0.30 \times 90 = 27$$

$$c_{i2} = 0.25 \times 70 = 17.5$$

$$c_{i3} = 0.15 \times 50 = 7.5$$

$$c_{i4} = 0.15 \times 60 = 9$$

$$c_{i5} = 0.15 \times 80 = 12$$

Scorul agregat este:

$$S_i = 27 + 17.5 + 7.5 + 9 + 12 = 73$$

Explicația scorului poate fi exprimată astfel: Măsura obține scorul agregat 73. Cea mai mare contribuție provine din performanța climatică, cu 27 de puncte, urmată de performanța asupra mobilității, cu 17,5 puncte, și de performanța socială, cu 12 puncte.

7.2. Contribuția absolută și contribuția relativă

Putem descrie scorul în două moduri complementare.

Contribuția absolută este:

$$c_{ij} = x_{ij}w_j \text{ (contribuție = performanța} \times \text{pondere)}$$

și exprimă numărul de puncte aduse de criteriul respectiv la scor.

Putem calcula și contribuția relativă:

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{S_i} \times 100$$

arată proporția scorului total explicată de fiecare criteriu. n exemplul anterior, contribuția climatică este:

$$\frac{27}{73} \times 100 \approx 36.99\%$$

Astfel putem spune că aproximativ 37% din scorul agregat provine din contribuția criteriului climatic. Pentru studiul experimental putem păstra ambele valori.

7.3. Descompunerea scorului

Descompunerea permite răspunsul la întrebarea: Care criterii contribuie cel mai mult la scorul unei anumite măsuri?

- Poate arăta, de exemplu, că o măsură bine clasată:
- beneficiază predominant de performanța climatică;
- obține o contribuție importantă din fezabilitatea tehnică;
- este penalizată relativ de performanța economică;
- sau este susținută mai ales de criteriile cărora profilul de ponderi le acordă importanță mare

7.4. Matricea contribuțiilor

Pentru toate cele șase măsuri putem construi o matrice cu forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} \end{bmatrix}$$

iar pentru fiecare rând:

$$S_i = \sum_{j=1}^5 c_{ij}$$

În forma tabelară:

Măsură	C1	C2	C3	C4	C5	Scor total
M1	c11	c12	c13	c14	c15	S1
M2	c21	c22	c23	c24	c25	S2
...	...	...	...	...	...	...

Acest tabel va constitui unul dintre principalele rezultate intermediare ale experimentului.

Exemplu explicație textuală generată de sistemul experimental:

M3 a obținut scorul agregat 74,6. Cea mai mare contribuție a provenit din performanța asupra mobilității, urmată de performanța climatică. Performanța economică a avut contribuția cea mai redusă la scor.

Rezultat secțiune 7

La finalul acestei etape vom avea pentru fiecare măsură:

- scorul agregat S_i ;
- cele cinci contribuții absolute c_{ij} ;
- contribuțiile relative procentuale;
- identificarea criteriilor cu cea mai mare și cea mai mică contribuție;
- verificarea că suma contribuțiilor reproduce exact scorul;
- explicație textuală generată automat din rezultate.

Fluxul devine astfel:

*performanțe + ponderi → contribuții pe criterii → scor agregat
→ explicația structurii scorului*

8. Explicarea diferenței dintre două măsuri și a relației de ordine

Scopul acestei etape este de a trece de la explicația unui scor individual la explicația unei relații de ordine din clasament. Cu alte cuvinte, nu mai întrebăm doar „din ce este construit scorul măsurii M1?”, ci: *De ce este măsura M_a clasată înaintea măsurii M_b ?*

8.1. Diferența dintre scorurile agregate

Pentru două măsuri M_a și M_b , scorurile sunt:

$$S_a = \sum_{j=1}^5 w_j x_{aj}$$

și

$$S_b = \sum_{j=1}^5 w_j x_{bj}$$

Dacă:

$$S_a > S_b$$

atunci M_a este clasată înaintea lui M_b

Diferența dintre cele două scoruri este:

$$\Delta S_{ab} = S_a - S_b$$

Această diferență exprimă *marginea de superioritate* a măsurii M_a față de M_b în configurația analizată.

8.3. Interpretarea semnelui contribuției

Pentru fiecare criteriu sunt posibile trei situații.

Dacă:

$$\Delta_{ab,j} > 0$$

criteriul îl avantajează pe M_a

Dacă:

$$\Delta_{ab,j} < 0$$

criteriul îl avantajează pe M_b

Dacă:

$$\Delta_{ab,j} = 0$$

criteriul nu contribuie la diferența dintre cele două măsuri.

Astfel putem identifica criteriile care susțin poziția superioară a unei măsuri, dar și criteriile prin care măsura aflată mai jos compensează parțial diferența.

8.4. Exemplu conceptual

Presupunem, pentru exemplificare:

$$S_a = 76;$$

$$S_b = 73;$$

$$\Delta_{ab} = 3$$

Iar contribuțiile criteriilor la diferență sunt:

Criteriu	Contribuție la diferență
C1 Climatic	+6
C2 Mobilitate	+2
C3 Tehnic	-1
C4 Economic	-3

C5 Social	-1
Total	+3

Interpretarea este:

- criteriul climatic reprezintă principalul avantaj al măsurii A;
- mobilitatea contribuie suplimentar în favoarea lui A;
- măsura B compensează prin fezabilitate tehnică, performanță economică și performanță socială;
- avantajele lui A depășesc însă compensațiile lui B cu 3 puncte.

Explicația nu mai este:

A este înaintea lui B în principal datorită avantajului climatic și, într-o măsură mai redusă, celui privind mobilitatea; B compensează parțial prin performanțele tehnică, economică și socială, dar nu suficient pentru a inversa ordinea.

8.5. Distincția dintre performanță și pondere

Și aici trebuie păstrată separarea conceptuală stabilită anterior.

Contribuția criteriului la diferență este:

$$\Delta_{ab,j} = w_j(x_{aj} - x_{bj})$$

Prin urmare, un criteriu poate deveni important în explicația ordinii din două motive:

- diferența de performanță dintre măsuri este mare;
- ponderea criteriului este mare;
- sau ambele.

8.6. Identificarea criteriilor decisive

Pentru fiecare pereche de măsuri vom putea ordona contribuțiile după valoarea lor absolută:

$$|\Delta_{ab,j}|$$

Criteriul cu cea mai mare valoare absolută este criteriul cu cea mai mare contribuție la diferența dintre scoruri.

Putem defini *criteriul dominant în explicația diferenței*:

$$j^* = \arg \max_j |\Delta_{ab,j}|$$

De evitat formulări precum “acest criteriu determină singur ordinea” (doar dacă acest lucru este matematic adevărat.). De preferat este “criteriul cu cea mai mare contribuție la diferența observată.”

8.7. Explicarea relațiilor relevante din clasament

Nu este obligatoriu să explicăm toate cele 15 perechi de măsuri cu aceeași prioritate. Pentru clasamentul de bază, cele mai relevante sunt în primul rând perechile adiacente:

Rank₁ vs. Rank₂

Rank₂ vs. Rank₃

...

Rank₅ vs. Rank₆

Aceste relații definesc direct ordinea observată. Totuși, pentru testele contrafactice ulterioare putem utiliza și perechi neadiacente.

8.8. Marja dintre două măsuri

Pe lângă diferența absolută:

$$\Delta S_{ab} = S_a - S_b$$

este util să reținem și faptul că O diferență foarte mică indică o relație de ordine potențial fragilă, în timp ce o diferență mare sugerează că este necesară o modificare mai substanțială pentru inversarea pozițiilor.

Nu este necesară definirea unui prag arbitrar. Robustețea va fi evaluată ulterior prin perturbări și contrafactice. Marja (rezultatul diferenței) este doar *un indicator descriptiv inițial*.

8.9. Verificarea matematică a explicației comparative

Pentru fiecare pereche trebuie verificată egalitatea:

$$\sum_{j=1}^5 \Delta_{ab,j} = S_a - S_b$$

Dacă această egalitate nu este respectată, explicația comparativă nu reproduce mecanismul de agregare și există o eroare de calcul sau de implementare (această verificare poate fi automatizată în Python).

8.10. Explicația textuală standardizată

Pentru fiecare pereche relevantă va fi generat automat un text bazat strict pe rezultate.

Ex: M2 ranks above M4 by 3.6 points. The largest positive contribution to this difference comes from climate performance (+4.8 points), followed by mobility performance (+2.1 points). M4 partially compensates through economic performance (-2.2 points) and technical feasibility (-1.1 points).

M2 este clasată înaintea M4 cu 3,6 puncte. Cea mai mare contribuție la această diferență provine din performanța climatică, urmată de performanța asupra mobilității. M4 compensează parțial prin performanța economică și fezabilitatea tehnică.

8.11. De la explicație descriptivă la explicație contrafactuală

Pasul 8 răspunde la: „De ce A este înaintea lui B în configurația actuală?”

explicație factuală = de ce avem ordinea actuală

explicație contrafactuală = ce modificare ar schimba această ordine (pasul 9).

Ambele sunt necesare pentru mecanismul de explicare a clasamentului. Pasul 8 nu testează încă fidelitatea explicației. Demonstrează doar că explicația descriptivă este matematic consistentă cu WSM.

Testarea va fi atunci când se va produce o afirmație de forma:

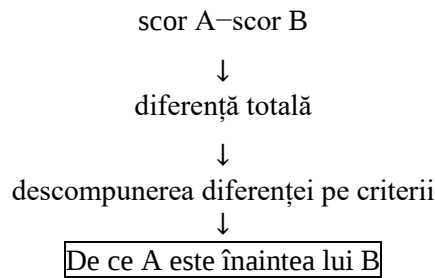
dacă ponderea criteriului C_1 se modifică de la w_1 la w'_1 , B va depăși A.

Rezultatul Pasului 8

Pentru fiecare pereche analizată vom obține:

- scorurile celor două măsuri;
- diferența totală dintre scoruri;
- contribuția fiecărui criteriu la această diferență;
- criteriile care avantajează fiecare măsură;
- criteriul cu cea mai mare contribuție la diferența observată;
- verificarea matematică a descompunerii;
- explicație textuală generată automat.

Fluxul explicativ devine:



Pasul 9. Definirea contrafactualului

Scopul acestei etape este de a trece de la explicația descriptivă a ordinii existente la o explicație de tip: *Ce modificare minimă a ponderilor criteriilor ar fi necesară pentru ca ordinea dintre două măsuri să se inverseze?*

Reprezintă componenta centrală a mecanismului de explicare la nivel de clasament.

9.1. Situația de plecare

Presupunem două măsuri:

$$M_a \text{ și } M_b$$

cu scorurile:

$$S_a > S_b$$

prin urmare, în clasamentul inițial:

$$M_a > M_b$$

dorim să identificăm un nou vector de ponderi:

$$W' = (w_1', w_2', w_3', w_4', w_5')$$

astfel încât:

$$S_b(W') > S_a(W')$$

iar ordinea devine:

$$M_b > M_a$$

9.2. Ce înseamnă „contrafactual”

Explicația factuală spune:

A este înaintea lui B deoarece avantajele sale ponderate pe anumite criterii depășesc avantajele lui B.

Explicația contrafactuală spune:

Dacă importanța criteriilor s-ar modifica în acest mod, B ar depăși A.

Contrafactualul descrie o configurație alternativă minimal diferită de cea actuală, în care rezultatul se schimbă.

9.3. Condiția de inversare

Pentru profilul inițial:

$$W=(w_1,\dots,w_5)$$

avem:

$$S_a(W) > S_b(W)$$

căutăm:

$$W'$$

Observație: W' - este calculat automat de sistem. Se pornește de la situația inițială: $S_a(W) > S_b(W)$, adică măsura M_a este înaintea lui M_b .

Apoi algoritmul rezolvă automat problema:

$$\min_{W'} \sum_{j=1}^5 |w'_j - w_j|$$

sub condițiile:

$$S_b(W') > S_a(W')$$

$$\sum_{j=1}^5 w'_j = 1$$

$$w'_j \geq 0$$

sistemul caută cel mai apropiat profil de ponderi față de profilul inițial care produce inversarea dorită.

pentru care:

$$S_b(W') > S_a(W')$$

sau echivalent:

$$S_b(W') - S_a(W') > 0$$

cum:

$$S_i(W') = \sum_{j=1}^5 w'_j x_{ij}$$

rezultă condiția matematică fundamentală a contrafactualului:

$$\sum_{j=1}^5 w'_j (x_{bj} - x_{aj}) > 0$$

9.4. Constrângerile ponderilor

Noul profil trebuie să rămână valid:

$$w'_j \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^5 w'_j = 1$$

Opțional, putem introduce ulterior și limite suplimentare dacă vrem să evităm ponderi nerealiste. de exemplu:

$$w'_j \in [l_j, u_j]$$

9.5. Ce înseamnă „modificare minimă”

Aici trebuie definit criteriul de proximitate dintre W și W'

O alegere foarte potrivită este norma L_1 :

$$D(W, W') = \sum_{j=1}^5 |w'_j - w_j|$$

și problema devine (sub condițiile de mai sus):

$$\min_{W'} \sum_{j=1}^5 |w'_j - w_j|$$

interpretarea este: *găsim cea mai mică redistribuire totală a ponderilor care inversează ordinea.*

Observație: Norma L_1 este o măsură a „distanței” dintre doi vectori. În cazul nostru, măsoară cât de mult diferă profilul inițial de ponderi W față de profilul contrafactual W' .

Norma L_1 are următoarele avantaje:

- este transparentă;
- măsoară direct cât de mult se schimbă ponderile;
- favorizează soluții relativ sparse, adică modificări concentrate pe puține criterii;
- este ușor de implementat ca problemă de optimizare liniară;
- explicația rezultată este ușor de transpus în limbaj natural.

De exemplu: Pentru inversarea ordinii dintre M_2 și M_3 este suficientă o redistribuire totală de 0,08 a ponderilor, concentrată în principal asupra criteriului climatic și criteriului economic.

Dacă:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$

și sistemul urmărește:

$$W' = (w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5)$$

atunci norma L_1 este:

$$\|W' - W\|_1 = |w'_1 - w_1| + |w'_2 - w_2| + |w'_3 - w_3| + |w'_4 - w_4| + |w'_5 - w_5|$$

De exemplu, dacă:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

și sistemul găsește:

$$W' = (0.27, 0.25, 0.15, 0.18, 0.15)$$

atunci:

$$\|W' - W\|_1 = |0.27 - 0.30| + |0.25 - 0.25| + |0.15 - 0.15| + |0.18 - 0.15| + |0.15 - 0.15|$$

$$\|W' - W\|_1 = 0.03 + 0 + 0 + 0.03 + 0 = 0.06$$

Interpretarea este că, pentru a inversa ordinea, este necesară o redistribuire totală de 0,06, adică 6 puncte procentuale cumulate între ponderi. Utilitatea acestui experiment constă în faptul că dorim să obținem profilul W' care schimbă clasamentul prin cea mai mică modificare posibilă a ponderilor. De aceea formulăm:

$$\min \|W' - W\|_1$$

Chiar dacă diferența este negativă, pentru norma L_1 folosim valoarea absolută a diferenței.

$$|0.27 - 0.30| = |-0.03| = 0.03$$

Norma L1 măsoară **mărimea totală a modificării**, nu direcția ei. Direcția rămâne însă importantă și o păstrăm separat:

$$\Delta w_1 = -0.03$$

$$\Delta w_4 = +0.03$$

- $-0,03$ = ponderea C1 a scăzut cu 3 puncte procentuale;
- $+0,03$ = ponderea C4 a crescut cu 3 puncte procentuale;
- pentru calculul distanței L1 folosim $(0,03 + 0,03 = 0,06)$.

Un detaliu important: suma ponderilor trebuie să rămână . O valoare modificată de la un criteriu trebuie să se regăsească în alt criteriu/criterii.

De exemplu:

inițial:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

după modificare:

$$W' = (0.27, 0.25, 0.15, 0.18, 0.15)$$

modificările sunt:

$$\Delta W = (-0.03, 0, 0, +0.03, 0)$$

Norma L1 adună valorile absolute:

$$|-0.03| + |0| + |0| + |0.03| + |0| = 0.06$$

de aceea putem distinge:

$$L1 \text{ distance} = 0.06$$

dar

$$\text{redistributed weight} = 0.03$$

Distanța L1 dintre cele două profiluri de ponderi este 0,06, ceea ce corespunde redistribuirii a 0,03 din ponderea totală între criterii.

9.7. Regula de conservare a sumei ponderilor

Creșterea unei ponderi trebuie compensată de scăderea altora.

Dacă:

$$w_1' > w_1$$

atunci trebuie să existe cel puțin un alt criteriu pentru care:

$$w_k' < w_k$$

astfel încât:

$$\sum_{j=1}^5 w_j' = 1$$

9.8. Tipuri de contrafactice

Pentru acest studiu se pot distinge trei niveluri.

Tip 1 — contrafactual unidimensional

Se modifică în principal o singură pondere, iar restul se ajustează proporțional.

Avantaj: explicație foarte ușor de înțeles.

Tip 2 — contrafactual multidimensional

Algoritmul poate modifica mai multe ponderi simultan pentru a minimiza schimbarea totală.

Avantaj: soluție mai aproape de optimul matematic.

Tip 3 — contrafactual restricționat

Se impun limite asupra anumitor ponderi sau asupra criteriilor care pot fi modificate.

Avantaj: mai realist în aplicații ulterioare.

9.9. Exemplu conceptual

Presupunem:

$$W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

și:

$$M_a > M_b$$

Algoritmul poate găsi:

$$W' = (0.26, 0.25, 0.15, 0.19, 0.15)$$

Asta înseamnă:

$$\Delta W = (-0.04, 0, 0, +0.04, 0)$$

Interpretarea:

Reducerea ponderii criteriului climatic cu 4 puncte procentuale și creșterea ponderii criteriului economic cu 4 puncte procentuale ar fi suficientă pentru ca M_b să depășească M_a .

9.10. Toleranță numerică pentru confirmarea inversării

Pentru a evita situațiile numerice în care:

$$S_a = S_b$$

sau diferența este aproape zero, putem introduce o toleranță ε :

$$S_b(W') \geq S_a(W') + \varepsilon$$

unde:

$$\varepsilon > 0$$

Exemplu: dacă într-un calcul numeric, algoritmul poate ajunge la ceva de tipul:

$$S_b(W') = 73.0000001$$

și:

$$S_a(W') = 73.0000000$$

Tehnic, B este înaintea lui A. Practic însă, diferența este atât de mică încât poate fi doar efectul preciziei de calcul.

De aceea introducem o marjă foarte mică, ε , și cerem:

$$S_b(W') \geq S_a(W') + \varepsilon$$

de exemplu, dacă alegem:

$$\varepsilon = 0.000001$$

atunci B trebuie să fie cu cel puțin această valoare peste A. Important: această marjă nu are semnificație decizională și nu înseamnă că o diferență de 0,000001 este relevantă în politică publică. Este doar o protecție tehnică pentru algoritm.

Concluzie: Pentru a evita tratarea unei egalități numerice sau a unei diferențe rezultate din precizia de calcul drept inversare reală, condiția contrafactuală va include o toleranță pozitivă foarte mică ε , astfel încât noul scor al măsurii care urmează să depășească alternativa inițial superioară să satisfacă $S_b(W') \geq S_a(W') + \varepsilon$. Valoarea lui ε are exclusiv rol numeric și nu reprezintă un prag de relevanță decizională.

9.12. Ce produce algoritmul

Pentru fiecare pereche analizată, algoritmul va returna:

- profilul inițial $\backslash(W\backslash)$;
- profilul contrafactual $\backslash(W'\backslash)$;
- modificarea fiecărei ponderi;
- distanța totală dintre profile;
- scorurile inițiale;
- scorurile contrafactuale;
- ordinea inițială;
- ordinea prezisă după modificare.

De exemplu:

Câmp	Valoare
Pair	M2 vs M3
Initial order	M2 > M3
Initial score gap	2.4
C1 change	-0.04
C2 change	0
C3 change	0
C4 change	+0.04
C5 change	0
L1 distance	0.08
Predicted order	M3 > M2

Explicația textuală:

M2 este inițial clasată înaintea M3. Cea mai mică redistribuire identificată a ponderilor care inversează ordinea constă în reducerea ponderii criteriului climatic cu 0,04 și creșterea ponderii criteriului economic cu 0,04. În acest profil contrafactual, M3 este estimată să depășească M2.

9.13. Legătura cu fidelitatea explicației

Pentru un singur contrafactual vom avea:

$$\text{Verified} \in \{0,1\}$$

Pentru un set de explicații vom putea ulterior calcula:

Fidelity = numărul total de explicații testate / numărul de explicații confirmate

Rezultatul Pasului 9

La finalul acestei etape avem definit formal mecanismul:

clasament inițial $\rightarrow$ problemă de optimizare $\rightarrow W' \rightarrow$ schimbare prezisă a ordinii

Mai precis:

- condiția de inversare;
- constrângerile asupra ponderilor;
- definiția modificării minime;
- utilizarea normei L1;
- regula de conservare a sumei ponderilor;
- profilul contrafactual W' ;
- diferența ΔW ;
- explicația textuală asociată;
- predicția care va fi verificată în etapa următoare.

Pasul 10. Verificarea contrafactualului

Scopul acestei etape este verificarea efectivă a explicației contrafactice generate în Pasul 9. Dacă algoritmul identifică un profil alternativ de ponderi W' și afirmă că acesta inversează ordinea dintre două măsuri, afirmația trebuie verificată prin recalcularea completă a scorurilor și a clasamentului.

10.1. Situația de plecare

Presupunem că, pentru profilul inițial de ponderi:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$

avem:

$$S_a(W) > S_b(W)$$

deci:

$$M_a > M_b$$

Algoritmul contrafactual (Pasul 9) propune automat:

$$W' = (w_1', w_2', w_3', w_4', w_5')$$

și prezice că:

$$S_b(W') > S_a(W')$$

adică:

$$M_b > M_a$$

10.2. Recalcularea scorurilor

Pentru profilul contrafactual W' , scorurile celor două măsuri sunt recalculate:

$$S'_a = \sum_{j=1}^5 w'_j x_{aj}$$

și:

$$S'_b = \sum_{j=1}^5 w'_j x_{bj}$$

Matricea criteriu–performanță X rămâne neschimbată.

$$X = \text{constant}$$

$$W \rightarrow W'$$

10.3. Verificarea inversării

Explicația este considerată confirmată dacă:

$$S_b' > S_a'$$

și deci:

$$M_b > M_a$$

Dacă rezultatul este:

$$S_b' \leq S_a'$$

atunci explicația contrafactuală nu este confirmată.

Putem defini:

$$Verified = \begin{cases} 1, & \text{dacă inversarea prezisă se produce} \\ 0, & \text{dacă inversarea prezisă nu se produce} \end{cases}$$

10.4. Verificarea întregului clasament

Pentru profilul W', trebuie recalculat întregul clasament al celor șase măsuri:

$$R' = \text{Ranking}(X, W')$$

o modificare a ponderilor poate afecta și poziția altor măsuri.

10.5. Predicție versus rezultat observat

Pentru fiecare explicație contrafactuală vom păstra explicit:

Element	Conținut
Ordinea inițială	$M_a > M_b$
Profil inițial	W
Profil contrafactual	W'
Schimbarea prezisă	$M_b > M_a$
Scor nou M_a	S_a'
Scor nou M_b	S_b'
Ordinea recalculată	rezultat efectiv
Verified	TRUE / FALSE

10.6. Verificarea condițiilor asupra lui W'

Înainte de recalculare trebuie verificat și faptul că profilul contrafactual este valid.

Trebuie să fie respectate:

$$w_j' \geq 0$$

pentru toate criteriile și:

$$\sum_{j=1}^5 w_j' = 1$$

În implementare, din cauza preciziei numerice, vom accepta o toleranță foarte mică pentru sumă, de exemplu:

$$\left| \sum_j w_j' - 1 \right| < \varepsilon$$

Dacă profilul nu respectă aceste condiții, explicația trebuie respinsă înainte de testarea clasamentului. primul contrafactual verificat.

10.8. Marja după inversare

Este util să calculăm și:

$$\text{Margin}' = S_b' - S_a'$$

Dacă:

$$\text{Margin}' > 0$$

inversarea este confirmată.

Dacă marja este foarte apropiată de zero, soluția este foarte aproape de frontiera de inversare. Acest lucru este normal pentru un contrafactual minim. O marjă mică poate fi considerată validă.

10.9. Toleranța numerică

În calculul numeric, trebuie evitată concluzia eronată că două scoruri sunt diferite doar din cauza erorilor floating-point.

Vom utiliza o toleranță:

$$\varepsilon$$

și vom considera inversarea confirmată numai dacă:

$$S_b' - S_a' > \varepsilon$$

10.10. Verificarea reproductibilității

Aceeași explicație contrafactuală, aplicată asupra acelorași date, trebuie să producă același rezultat.

Formal:

$$\text{Verification}(X, W') = \text{constant}$$

la rulări repetate.

Această verificare este importantă deoarece întregul mecanism WSM este determinist (pentru aceleași date de intrare, WSM produce întotdeauna exact același rezultat).

10.11. Explicația textuală după verificare

După recalculare, sistemul va genera un rezultat de forma:

Profilul contrafactual propus a fost verificat prin recalculare. După modificarea ponderilor, scorul lui M3 a crescut de la X la Y, iar scorul lui M2 s-a modificat de la A la B, astfel încât M3 a depășit M2. Inversarea prognozată a fost confirmată.

Dacă nu se produce schimbarea:

Profilul contrafactual propus nu a produs inversarea anticipată după recalculare; explicația este clasificată drept neconfirmată.

Textul trebuie generat automat pe baza rezultatelor efective.

10.12. Separarea generatorului de verifcator

Pentru rigurozitate, trebuie implementate două funcții separate:

GenerateCounterfactual()

și:

VerifyCounterfactual()

Prima produce:

W'

A doua primește:

X, W', M_a, M_b

și recalculează independent rezultatul.

Această separare reduce riscul ca aceeași funcție care generează soluția să „declare” automat că soluția este corectă fără recalculare independentă.

10.14. Ce nu demonstrează verificarea

Dacă explicația este confirmată, se demonstrează că: *modificarea ponderilor indicată produce efectiv inversarea prezisă în modelul multicriterial.*

Nu se demonstrează:

- ponderile contrafactuale sunt preferințe reale ale unor actori;
- măsurile au în realitate performanțele sintetice utilizate;
- noul clasament este „mai corect” decât cel inițial;
- decizia publică ar trebui schimbată.

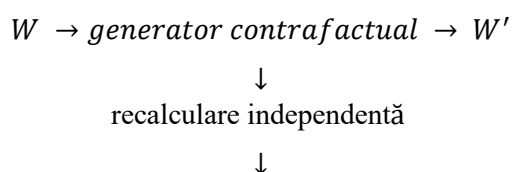
Verificarea testează fidelitatea explicației față de **mecanismul de agregare**, nu validitatea normativă a unei decizii.

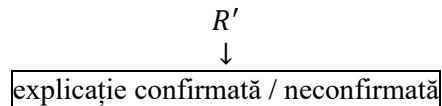
Rezultatul Pasului 10

La finalul acestei etape, pentru fiecare contrafactual avem:

- profilul inițial W ;
- profilul propus automat W' ;
- validarea matematică a profilului W' ;
- scorurile recalculare pentru toate măsurile;
- noul clasament R' ;
- verificarea relației de ordine vizate;
- marja după inversare;
- distanța dintre W și W' ;
- indicatorul Verified = TRUE/FALSE;
- explicația textuală a rezultatului verificării.

Fluxul complet devine:





Pasul 11. Analiza de sensibilitate a clasamentului

Scopul acestei etape este evaluarea stabilității clasamentului de bază atunci când ponderile criteriilor sunt modificate în mod controlat. Dacă explicația contrafactuală din pașii anteriori răspunde la întrebarea „ce modificare minimă ar inversa ordinea dintre două măsuri?”, analiza de sensibilitate răspunde unei întrebări mai generale: *Cât de mult se modifică întregul clasament atunci când importanța relativă a criteriilor variază în jurul profilului de referință?*

Această etapă este necesară deoarece un clasament poate fi perfect explicabil și totuși instabil.

11.1. Situația de plecare

Pornim de la matricea criteriu–performanță fixată anterior:

$$X$$

și de la profilul de ponderi de referință:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$

În analiza de sensibilitate, matricea X rămâne neschimbată:

$$X = \text{constant}$$

iar variațiile sunt introduse exclusiv în ponderi:

$$W \rightarrow W^{(k)}$$

Această alegere permite izolarea efectului preferințelor asupra clasamentului.

11.2. Principiul analizei de sensibilitate

Pentru fiecare criteriu C_j , ponderea sa inițială w_j va fi modificată controlat.

De exemplu, pentru un nivel de variație δ :

$$w_j' = w_j(1 \pm \delta)$$

unde δ poate avea valori precum:

$$0.05, 0.10, 0.20$$

corespunzătoare unor variații de:

- $\pm 5\%$;
- $\pm 10\%$;
- $\pm 20\%$.

Deoarece suma ponderilor trebuie să rămână egală cu 1, modificarea ponderii criteriului perturbat va fi compensată prin ajustarea proporțională a tuturor celorlalte ponderi.

Dacă ponderea w_j este modificată la valoarea w_j' , suma disponibilă pentru celelalte criterii devine:

$$1 - w_j'$$

prin urmare, pentru fiecare criteriu $k \neq j$, noua pondere se calculează prin:

$$w_k' = w_k \frac{1 - w_j'}{1 - w_j}$$

Această regulă păstrează proporțiile relative dintre criteriile care nu sunt perturbate direct și garantează că celelalte ponderi sunt ajustate astfel încât condiția:

$$\sum_{j=1}^5 w'_j = 1$$

să fie păstrată. Astfel, fiecare scenariu modifică explicit o singură pondere, iar efectul necesar pentru renormalizare este distribuit automat și proporțional între celelalte patru criterii.

Exemplu

Pentru profilul de referință: $W = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$

presupunem o creștere cu 10% a ponderii criteriului C_1 :

$$w'_1 = 0.30 \times 1.10 = 0.33$$

Inițial, celelalte ponderi însumează:

$$1 - 0.30 = 0.70$$

După perturbare, acestea trebuie să însumeze:

$$1 - 0.33 = 0.67$$

Factorul de ajustare este:

$$\frac{0.67}{0.70} = 0.957142...$$

Prin urmare:

$$w'_2 = 0.25 \times 0.957142 \approx 0.2393$$

iar pentru fiecare dintre C_3, C_4, C_5 :

$$w'_k = 0.15 \times 0.957142 \approx 0.1436$$

Rezultă aproximativ:

$$W' = (0.33, 0.2393, 0.1436, 0.1436, 0.1436)$$

iar suma rămâne 1.

Această procedură este deterministă: pentru același profil inițial, același criteriu perturbat și aceeași valoare delta, rezultatul este întotdeauna identic.

11.3. Scenariile de sensibilitate

Pentru fiecare criteriu vom genera două direcții de perturbare:

$$+C_j \text{ și } -C_j$$

adică:

- creșterea ponderii;
- reducerea ponderii.

La trei niveluri de variație:

$$5\%, 10\%, 20\%$$

vom avea pentru fiecare criteriu:

$$2 \times 3 = 6 \text{ scenarii}$$

Pentru cele cinci criterii:

$$5 \times 6 = 30$$

scenarii de sensibilitate, la care se adaugă profilul de bază (profilul de ponderi de referință de la care pornim înainte să facem perturbările).

Astfel, experimentul poate analiza în mod sistematic aproximativ:

$$30+1=31 \text{ configurații}$$

11.4. Recalcularea clasamentului

Pentru fiecare profil perturbant:

$$W^{(k)}$$

se recalculează scorurile:

$$S_i^{(k)} = \sum_{j=1}^5 w_j^{(k)} x_{ij}$$

și clasamentul:

$$R^{(k)} = \text{Ranking}(X, W^{(k)})$$

Fiecare clasament perturbant este apoi comparat cu clasamentul de referință:

$$R_0$$

Exemplu:

Profil de referință (baseline):

$$W_{\text{ref}} = (0.30, 0.25, 0.15, 0.15, 0.15)$$

Apoi construim profile perturbate, adică variante apropiate de el:

$$W^{(1)} = (0.32, 0.23, 0.15, 0.15, 0.15)$$

$$W^{(2)} = (0.28, 0.27, 0.14, 0.16, 0.15)$$

$$W^{(3)} = (...)$$

și pentru fiecare recalculăm clasamentul.

11.5. Ce urmărim la nivelul fiecărei măsuri

Pentru fiecare măsură M_i , analiza va urmări:

- rangul inițial;
- rangul după perturbare;
- diferența de rang;
- cea mai bună poziție obținută;
- cea mai slabă poziție obținută;
- criteriul la a cărui variație poziția este cea mai sensibilă.

Putem defini schimbarea de rang:

$$\Delta \text{Rank}_i^{(k)} = \text{Rank}_i^{(k)} - \text{Rank}_i^{(0)}$$

Dacă:

$$|\Delta \text{Rank}^{(k)}| > 0$$

poziția este sensibilă la perturbarea analizată.

11.6. Analiza inversării rangurilor

Un rezultat de interes este identificarea perechilor pentru care ordinea se inversează.

Dacă în clasamentul inițial:

$$M_a > M_b$$

iar într-un scenariu perturbat:

$$M_b > M_a$$

atunci avem o inversare de rang.

Pentru fiecare scenariu se va înregistra:

- perechea afectată;
- criteriul perturbat;
- amplitudinea perturbării;
- direcția modificării;
- noua ordine.

Această informație este importantă deoarece identifică relațiile fragile din clasament.

11.7. Pragul de perturbare la care apare prima schimbare

Pentru fiecare relație de ordine relevantă putem determina cea mai mică variație testată care produce o schimbare.

De exemplu:

- stabilă la $\pm 5\%$;
- stabilă la $\pm 10\%$;
- inversare la $+20\%$ C4

Acest rezultat nu este identic cu contrafactualul minim calculat în Pasul 9.

Diferența este:

- Pasul 9 caută matematic cea mai mică modificare posibilă;
- Pasul 11 testează scenarii standardizate de perturbare.

Cele două analize sunt complementare.

11.8. Sensibilitate locală versus robustețe

Analiza de sensibilitate arată cum reacționează rezultatul la modificarea intrărilor.

Robustețea reprezintă concluzia privind stabilitatea rezultatului sub aceste variații.

Prin urmare:

Sensitivity analysis $\rightarrow$ evidence about robustness

O măsură poate fi considerată relativ robustă dacă își menține poziția în majoritatea scenariilor analizate și nu prezintă inversări la variații mici.

11.9. Compararea clasamentelor prin Kendall's τ

Pe lângă observarea pozițiilor individuale, putem măsura asemănarea dintre clasamentul de bază și fiecare clasament perturbat utilizând corelația de rang Kendall:

$$\tau(R_0, R^{(k)})$$

Interpretarea generală este:

- valori apropiate de 1: clasamente foarte similare;
- valori mai mici: modificări mai importante ale ordinii;
- valori negative: ordine substanțial inversată.

Exemplu: Să luăm patru măsuri.

Clasamentul A:

$$M1 > M2 > M3 > M4$$

Clasamentul B:

$$M1 > M3 > M2 > M4$$

Cele două clasamente sunt foarte asemănătoare: singura diferență este că M2 și M3 și-au inversat pozițiile. Kendall analizează toate perechile de măsuri și verifică dacă relația dintre fiecare pereche este aceeași în cele două clasamente.

Formula utilizată:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ne spune câte perechi distincte putem forma din n obiecte (măsuri).

dacă avem n măsuri, fiecare măsură se poate împerechea cu toate celelalte, adică cu:

$$n-1$$

Deci $n-1$ apare fiindcă fiecare măsură se compară cu toate celelalte, mai puțin cu ea însăși.

De exemplu, dacă avem 4 măsuri: M1, M2, M3, M4. Pentru M1 există 3 parteneri posibili (la fel și pentru celelalte măsuri): M2, M3, M4

adică:

$$4-1=3$$

La fel pentru fiecare dintre cele 4 măsuri. De aceea apare: $n(n-1)$

Fiecare pereche apare de două ori. De exemplu:

- M1–M2
- M2–M1
- La fel și pentru celelalte

Pentru 4 măsuri:

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

și cele 6 perechi unice sunt:

M1–M2, M1–M3, M1–M4, M2–M3, M2–M4, M3–M4.

O pereche este concordantă dacă ordinea celor două măsuri este aceeași în ambele clasamente și discordantă dacă ordinea este inversată.

În absența egalităților, forma simplificată a coeficientului este:

$$\tau = \frac{C - D}{C + D}$$

unde C reprezintă numărul perechilor concordante, iar D numărul perechilor discordante.

Coeficientul variază între:

$$-1 \leq \tau \leq 1$$

unde:

- $\tau = 1$ indică două clasamente identice;
- valorile apropiate de 1 indică o concordanță ridicată;
- valorile apropiate de 0 indică o concordanță redusă a ordinii;
- $\tau = -1$ indică inversarea completă a ordinii.

Deoarece există posibilitatea unor scoruri egale și, implicit, a unor ranguri egale, implementarea va utiliza Kendall's τ_b , variantă care corectează coeficientul pentru existența egalităților. Această alegere permite aplicarea aceleiași proceduri indiferent dacă apar sau nu egalități în clasamente și evită introducerea artificială a unei reguli de departajare.

Exemplu:

Clasamentul A: $M_1 > M_2 = M_3 > M_4$

Clasamentul B: $M_1 > M_3 > M_2 > M_4$

În clasamentul A, pentru perechea M_2 – M_3 avem egalitate. În clasamentul B, M_3 este înaintea lui M_2 .

Formula simplificată τ știe să lucreze bine atunci când fiecare pereche este fie concordantă, fie discordantă. Dar aici apare și o a treia situație: $M_2 = M_3$ (egalitate).

Kendall's τ_b corectează calculul astfel încât aceste egalități să fie luate în considerare. Formula este:

$$\tau_b = \frac{C - D}{\sqrt{(C + D + T_A)(C + D + T_B)}}$$

unde:

- C = perechi concordante;
- D = perechi discordante;
- T_A = perechi aflate la egalitate doar în clasamentul A;
- T_B = perechi aflate la egalitate doar în clasamentul B.

Formula este utilă, mai precis când întâlnim, de exemplu: $S_2 = S_3$ și atunci:

$$\text{Rank}(M_2) = \text{Rank}(M_3)$$

Pentru a nu avea o ordine artificială (de ex: M_2 înaintea lui M_3 doar pentru a putea calcula Kendall), folosim formula τ_b .

Pentru fiecare scenariu k se va înregistra:

$$\tau_k = \tau(R_0, R^{(k)})$$

11.10. Identificarea și frecvența inversărilor de rang

Kendall's τ descrie modificarea globală a clasamentului, dar nu arată direct care relații dintre măsuri s-au schimbat. De aceea, pentru fiecare profil perturbat vor fi identificate explicit inversările de rang.

Dacă în clasamentul de referință:

$$M_a > M_b$$

iar în scenariul k :

$$M_b > M_a$$

atunci se înregistrează o inversare pentru perechea (M_a, M_b) .

Pentru fiecare dintre cele 15 perechi se va calcula:

$$F_{ab} = \frac{N_{ab}^{rev}}{N}$$

unde:

- N_{ab}^{rev} este numărul scenariilor în care ordinea perechii se inversează;
- N este numărul total de scenarii de sensibilitate.

Rezultatul va arăta, de exemplu, că relația M1–M2 nu se inversează în niciun scenariu, în timp ce relația M3–M4 se inversează în mai multe configurații.

Exemplu: Să presupunem că în clasamentul de bază avem:

$$M1 > M2 > M3 > M4$$

Apoi rulăm 100 de scenarii de sensibilitate, fiecare cu un profil de ponderi ușor modificat.

Ne uităm, de exemplu, la perechea:

$$M_2 \text{ vs. } M_3$$

În clasamentul de bază:

$$M2 > M3$$

Dar în cele 100 de scenarii perturbate putem avea:

- în 72 de scenarii: $M2 > M3$
- în 28 de scenarii: $M3 > M2$

Asta înseamnă că perechea M2–M3 a avut o *frecvență a inversării de rang de 28%*.

Formal:

$$f_{rev}(M2, M3) = \frac{28}{100} = 0,28$$

Interpretare: Relația de ordine dintre M2 și M3 este relativ sensibilă la modificarea ponderilor, deoarece în 28% dintre scenariile perturbate ordinea inițială s-a inversat.

În schimb, pentru perechea: M1 vs. M4

Putem avea:

- 99 de scenarii: $M1 > M4$
- 1 scenariu: $M4 > M1$

Atunci:

$$f_{rev}(M1, M4) = 1\%$$

și putem spune că relația dintre cele două măsuri este mult mai stabilă.

Un tabel ar putea arăta astfel:

Pereche	Ordinea de bază	Nr. inversări	Frecvență inversare
M1–M2	$M1 > M2$	8	8%
M1–M3	$M1 > M3$	3	3%
M1–M4	$M1 > M4$	1	1%
M2–M3	$M2 > M3$	28	28%
M2–M4	$M2 > M4$	12	12%
M3–M4	$M3 > M4$	21	21%

11.11. Stabilitatea poziției fiecărei măsuri

Pentru fiecare măsură M_i se va determina distribuția pozițiilor ocupate în scenariile de sensibilitate.

Se vor raporta:

- rangul în clasamentul de referință;
- rangul minim obținut;
- rangul maxim obținut;
- frecvența fiecărei poziții;
- rangul mediu.

Rangul mediu al măsurii este:

$$\overline{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_i^{(k)}$$

unde $R_i^{(k)}$ reprezintă poziția măsurii M_i în scenariul k .

Exemplu: De exemplu, pentru M2, în 5 scenarii ai pozițiile:

3, 2, 3, 4, 3

Atunci:

$$\overline{R}_2 = \frac{1}{5} (3 + 2 + 3 + 4 + 3) = \frac{15}{5} = 3$$

înseamnă că poziția medie a măsurii M2 este locul 3.

Rangul minim și maxim se calculează din pozițiile pe care le ocupă aceeași măsură în toate scenariile de sensibilitate:

Pentru măsura M_i :

$$R_i^{min} = \min(R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, \dots, R_i^{(N)})$$

$$R_i^{max} = \max(R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, \dots, R_i^{(N)})$$

unde $R_i^{(k)}$ este poziția măsurii M_i în scenariul k .

Exemplu: pentru M2, să presupunem că în 6 scenarii avem rangurile: 3, 2, 3, 4, 2, 5

Atunci:

$$R_2^{min} = 2$$

pentru că cea mai bună poziție ocupată de M2 a fost locul 2,

iar:

$$R_2^{max} = 5$$

pentru că cea mai slabă poziție ocupată a fost locul 5.

Deci intervalul de rang pentru M2 este:

$$[2,5]$$

rangul minim este poziția cea mai bună, deoarece locul 1 este mai bun decât locul 5. Iar rangul maxim este poziția cea mai slabă.

Un exemplu de raportare ar putea fi:

Măsură	Rang de bază	Rang minim	Rang maxim	Rang mediu
M1	1	1	2	1,20
M2	2	1	3	2,05

M3	3	2	4	3,10
----	---	---	---	------

11.12. Stabilitatea relațiilor dintre măsuri

Pentru fiecare pereche se va calcula proporția scenariilor în care relația de ordine din clasamentul de bază se păstrează:

$$Stability_{ab} = \frac{N_{ab}^{same}}{N}$$

unde N_{ab}^{same} reprezintă numărul scenariilor în care ordinea dintre M_a și M_b rămâne identică celei din R_0 .

Dacă, ipotetic:

$$Stability_{ab} = 0.93$$

interpretarea este că ordinea dintre cele două măsuri s-a păstrat în 93% dintre scenariile de sensibilitate analizate.

11.13. Asocierea explicației cu stabilitatea relației explicate

Explicația obținută în Pasul 8 va fi raportată împreună cu rezultatele analizei de sensibilitate privind relația de ordine pe care o descrie.

De exemplu:

M2 este clasată înaintea M3 în principal datorită avantajului său în ceea ce privește performanța climatică. Această relație de ordine se menține în 29 dintre cele 30 de scenarii de sensibilitate și poate fi considerată stabilă în raport cu perturbările testate ale ponderilor.

sau, dacă rezultatul este sensibil:

M2 este clasată înaintea M3 în principal datorită avantajului său în ceea ce privește performanța climatică; totuși, ordinea dintre cele două măsuri se inversează 20 de scenarii care implică perturbări reduse ale ponderilor, ceea ce indică o sensibilitate a acestei relații de ordine față de profilul de ponderi utilizat.

Astfel distingem două proprietăți diferite:

Explanation = de ce există ordinea

și:

Stability = cât de ușor se schimbă ordinea

Un rezultat poate fi perfect explicabil, dar instabil.

11.14. Identificarea rezultatelor sensibile

Pe baza analizelor anterioare vor fi identificate relațiile de ordine care prezintă sensibilitate ridicată la variația ponderilor.

Evaluarea va utiliza împreună:

- valoarea Kendall's τ pentru clasamentul global;
- numărul și localizarea inversărilor;
- variația poziției fiecărei măsuri;
- stabilitatea perechilor;
- amplitudinea perturbării la care apare prima inversare.

Raportăm rezultatele observate și să distingem comparativ:

- relații care nu se modifică în intervalele testate;
- relații care se modifică numai la perturbările mai mari;
- relații care se inversează deja la perturbări mici.

Caracterizare empirică fără a introduce arbitrar o limită artificială.

11.15. Relația dintre analiza de sensibilitate și contrafactualul minim

Pentru a elimina confuzia dintre pasul 9 și pasul 11.

Pasul 9 determină: *cea mai mică modificare calculată prin optimizare care inversează o anumită relație de ordine.*

Pasul 11 determină: *ce se întâmplă cu clasamentul sub un set predefinit de perturbări standardizate ale ponderilor.*

Formal:

$$\text{Counterfactual} \rightarrow \min \Delta W$$

în timp ce:

$$\text{Sensitivity} \rightarrow \{W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(N)}\}$$

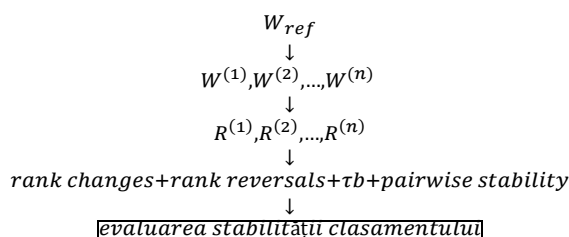
Contrafactualul caută activ limita minimă de schimbare. Analiza de sensibilitate verifică comportamentul clasamentului într-un spațiu controlat din jurul profilului de referință. Cele două rezultate sunt complementare.

Rezultatul Pasului 11

La finalul acestei etape vor fi obținute:

1. clasamentul pentru fiecare profil de ponderi perturbat;
2. variația poziției fiecărei măsuri;
3. inversările de rang și scenariile care le produc;
4. cea mai mică amplitudine standardizată testată la care apare o schimbare;
5. Kendall's τ -b între fiecare clasament perturbat și clasamentul de referință;
6. distribuția rangurilor fiecărei măsuri;
7. stabilitatea fiecărei relații pereche-cu-pereche;
8. identificarea relațiilor sensibile la modificarea ponderilor;
9. asocierea explicațiilor cu stabilitatea relațiilor explicate.

Fluxul pasului 11 devine:



(Weighted Sum Model - WSM)

Pasul 12. A doua metodă MCDA

12.1. Scopul utilizării unei a doua metode MCDA

Scopul acestei etape este verificarea măsurii în care clasamentul obținut prin metoda de referință Weighted Sum Model (WSM) este dependent de alegerea procedurii de agregare multicriterială.

În etapele anterioare, WSM a fost utilizată deoarece permite o descompunere directă a scorurilor și a diferențelor dintre măsuri, fiind adecvată pentru dezvoltarea mecanismului de explicare și a contrafactualurilor. Totuși, un clasament obținut printr-o singură metodă MCDA poate reflecta și proprietățile specifice ale acelei metode.

Prin urmare, aceleași alternative, aceleași valori criteriu-performanță și aceleași ponderi vor fi evaluate utilizând o a doua metodă MCDA, independentă conceptual de WSM. Rezultatul nu urmărește

identificarea unei metode „corecte” și a uneia „incorecte”, ci evaluarea concordanței clasamentului atunci când mecanismul de agregare este schimbat.

Formal, pentru aceleași intrări:

$$X = \text{constant}$$

și

$$W = \text{constant}$$

se vor calcula două clasamente:

$$R_{\text{WSM}} = \text{Ranking}_{\text{WSM}}(X, W)$$

și:

$$R_{M2} = \text{Ranking}_{M2}(X, W)$$

unde $M2$ desemnează cea de-a doua metodă MCDA, care în experiment va fi TOPSIS.

Compararea celor două rezultate va permite răspunsul la întrebarea:

În ce măsură ordinea măsurilor este păstrată atunci când aceleași performanțe și aceleași preferințe sunt procesate prin două mecanisme diferite de agregare multicriterială?

Această verificare este distinctă de analiza de sensibilitate din Pasul 11. În analiza de sensibilitate se modifică ponderile:

$$X = \text{constant}, \text{ metoda} = \text{constantă}, W \rightarrow W'$$

În Pasul 12 se modifică exclusiv mecanismul de agregare:

$$X = \text{constant}, W = \text{constant}, \text{ metoda} \rightarrow \text{metoda}'$$

Prin urmare, cele două teste investighează două surse diferite de variație a clasamentului:

$$\text{Pasul 11} \rightarrow \text{sensibilitate la ponderi}$$

$$\text{Pasul 12} \rightarrow \text{sensibilitate la metoda MCDA}$$

În experimentul preliminar, gradul de concordanță dintre clasamentele produse de cele două metode va fi evaluat prin coeficientul Kendall's.

Rezultatul urmărit al subsecțiunii 12.1 este, așadar, definirea unui test de dependență față de metoda MCDA, în care matricea de performanță și profilul de ponderi rămân neschimbate, iar singura componentă modificată este procedura de agregare.

12.2. Alegerea metodei TOPSIS

Pentru a doua metodă de agregare multicriterială va fi utilizată TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution). Alegerea sa urmărește introducerea unei proceduri de clasificare cu o logică diferită față de Weighted Sum Model, utilizată ca metodă de referință în etapele anterioare.

În WSM, scorul unei măsuri este obținut prin însumarea directă a performanțelor ponderate:

$$S_i = \sum_{j=1}^m w_j x_{ij}$$

Prin urmare, poziția unei măsuri rezultă din valoarea totală a contribuțiilor ponderate ale criteriilor.

TOPSIS utilizează o logică diferită. În loc să ordoneze alternativele exclusiv pe baza unei sume ponderate, metoda evaluează fiecare alternativă în raport cu două puncte de referință construite din date:

- soluția ideală pozitivă, reprezentând combinația celor mai favorabile performanțe pe criterii;
- soluția ideală negativă, reprezentând combinația celor mai puțin favorabile performanțe.

O alternativă este considerată mai favorabilă dacă este simultan:

mai aproape de soluția ideală pozitivă

și:

mai departe de soluția ideală negativă

WSM măsoară direct nivelul agregat al performanței ponderate, în timp ce TOPSIS evaluează poziționarea relativă a fiecărei măsuri față de două profiluri de referință.

Astfel, cele două metode procesează aceleași informații: X și W , dar le transformă în clasament prin mecanisme diferite:

WSM: performanțe ponderate $\rightarrow$ sumă agregată $\rightarrow$ clasament

TOPSIS: performanțe normalizate și ponderate $\rightarrow$ soluție ideală / non-ideală $\rightarrow$ distanțe $\rightarrow$ coeficient de apropiere $\rightarrow$ clasament

Alegerea TOPSIS ca metodă complementară prezintă astfel trei avantaje pentru experiment:

- introduce o logică de agregare distinctă față de WSM, ceea ce face comparația metodologic relevantă.
- permite utilizarea aceleiași matrice criteriu–performanță și a acelorași ponderi, astfel încât diferențele dintre clasamente să poată fi atribuite în principal mecanismului de agregare și nu modificării datelor de intrare.
- produce un clasament complet al acelorași șase măsuri, ceea ce permite compararea directă cu rezultatul WSM și evaluarea concordanței prin Kendall's τ .

TOPSIS nu „validează” WSM în sensul demonstrării faptului că unul dintre clasamente este corect. Rolul celei de-a doua metode este de a testa robustețea rezultatului față de alegerea mecanismului MCDA. O eventuală diferență între cele două clasamente nu va fi tratată automat ca eroare, ci ca informație privind dependența ierarhizării de metoda de agregare utilizată.

12.3. Datele de intrare

Pentru aplicarea metodei TOPSIS se vor utiliza exact aceleași date de intrare ca în cazul metodei WSM, astfel încât diferențele dintre rezultate să poată fi atribuite metodei de agregare.

Prima intrare este matricea criteriu–performanță:

$$X = (x_{ij})$$

unde:

- reprezintă măsurile de mobilitate urbană;
- $j = 1, \dots, 5$ reprezintă criteriile;
- x_{ij} reprezintă performanța măsurii M_i în raport cu criteriul C_j .

A doua intrare este profilul de ponderi:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$

cu:

$$w_j \geq 0$$

și:

$$\sum_{j=1}^m w_j = 1$$

Pentru comparația de bază dintre metode se va utiliza același profil de referință stabilit în Pasul 5: W_{ref} Experimental, comparația va avea astfel forma:

$$(X, W) \xrightarrow{WSM} R_{WSM}$$

și independent:

$$(X, W) \xrightarrow{TOPIS} R_{TOPIS}$$

În ambele cazuri sunt evaluate aceleași șase măsuri și aceleași cinci criterii.

Orientarea criteriilor

Toate criteriile C1–C5 au fost definite cu același sens:

valoare mai mare $\Rightarrow$ performanță mai favorabilă

Prin urmare, în experiment toate cele cinci criterii sunt tratate ca *benefit criteria*.

Această proprietate simplifică aplicarea TOPSIS, deoarece soluția ideală pozitivă va fi asociată valorilor cele mai favorabile, iar soluția ideală negativă valorilor cele mai puțin favorabile pentru fiecare criteriu.

Distincția față de normalizare

Faptul că TOPSIS utilizează aceeași matrice X nu înseamnă că algoritmul va opera direct asupra acestora în forma brută. Matricea X rămâne cu datele de intrare inițiale, iar normalizarea necesară TOPSIS va produce ulterior o matrice derivată:

$R = (r_{ij})$: reprezentare normalizată derivată pentru TOPSIS

Regula de control

Înainte de aplicarea TOPSIS se va verifica faptul că:

- matricea X este identică celei utilizate în WSM;
- profilul W este identic celui utilizat în comparația WSM;
- ordinea criteriilor este aceeași;
- ordinea măsurilor este aceeași;
- toate criteriile sunt orientate spre maximizare;
- nicio valoare nu este modificată special pentru TOPSIS.

Rezultatul acestei subsecțiuni este, prin urmare, fixarea condiției experimentale:

aceleași date + aceleași ponderi + metodă diferită

12.4. Normalizarea matricei pentru TOPSIS

Spre deosebire de WSM, în care matricea criteriu–performanță poate fi utilizată direct în experimentul nostru deoarece toate criteriile sunt deja exprimate pe aceeași scală $[0,100]$, aplicarea TOPSIS presupune construirea unei matrice normalizate. În TOPSIS, normalizarea este parte a procedurii standard de calcul și este necesară înainte de aplicarea ponderilor și de determinarea distanțelor față de soluțiile ideală și non-ideală.

Pornim de la matricea criteriu–performanță: $X = (x_{ij})$, unde x_{ij} reprezintă performanța măsurii M_i în raport cu criteriul C_j .

Pentru fiecare criteriu C_j , valorile sunt normalizate prin raportarea fiecărei performanțe la norma euclidiană a coloanei respective:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}}$$

unde:

- este valoarea inițială a performanței;

- r_{ij} este valoarea normalizată;
- n este numărul măsurilor analizate, în cazul nostru: $n=6$

Pentru fiecare criteriu se calculează mai întâi:

$$\sqrt{x_{1j}^2 + x_{2j}^2 + \dots + x_{6j}^2}$$

iar fiecare valoare din coloana respectivă este împărțită la acest rezultat.

De exemplu, pentru criteriul C_1 , valorile: $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{61}$

sunt transformate în:

$$r_{11} = \frac{x_{11}}{\sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 + x_{41}^2 + x_{51}^2}}$$

și, în mod analog, pentru celelalte cinci măsuri.

După aplicarea aceleiași proceduri tuturor celor cinci criterii rezultă matricea normalizată:

$$R=(r_{ij})$$

cu aceeași structură dimensională ca matricea inițială: 6x5

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} \end{bmatrix}$$

De ce este necesară normalizarea

TOPSIS determină ulterior distanța fiecărei măsuri față de soluția ideală pozitivă și soluția ideală negativă. Pentru ca aceste distanțe să fie calculate coerent, valorile criteriilor trebuie transformate într-o reprezentare comparabilă.

Normalizarea are rolul de a elimina efectul scării numerice originale asupra calculului distanțelor și de a transforma valorile într-o formă adecvată geometriei utilizate de TOPSIS.

În experimentul nostru, toate criteriile sunt deja pe scala: [0,100] deci nu există problema unor unități diferite, cum ar fi euro, tone de CO_2 , kilometri sau procente. Totuși, normalizarea este păstrată deoarece face parte din mecanismul TOPSIS și permite calcularea corectă a distanțelor euclidiene utilizate ulterior.

Proprietate de verificare

Pentru fiecare criteriu C_j , normalizarea vectorială produce:

$$\sum_{i=1}^6 r_{ij}^2 = 1$$

De exemplu, pentru fiecare dintre cele cinci coloane ale matricei normalizate vom verifica:

$$r_{1j}^2 + r_{2j}^2 + \dots + r_{6j}^2 \approx 1$$

diferențele foarte mici fiind acceptabile numai din cauza preciziei numerice.

Regula de reproducibilitate

Normalizarea este deterministă. Pentru aceeași matrice X , matricea normalizată rezultată trebuie să fie întotdeauna aceeași: $X \rightarrow R$, fără introducerea niciunui element aleator.

Rezultatul acestei subsecțiuni este construirea matricei normalizate: $R=(r_{ij})$

12.5. Aplicarea ponderilor

Această etapă constă în aplicarea ponderilor criteriilor asupra valorilor normalizate.

Pornim de la matricea normalizată: $R=(r_{ij})$ și de la profilul de ponderi W .

Pentru fiecare element al matricei normalizate se calculează valoarea ponderată:

$$v_{ij} = w_j r_{ij}$$

unde:

- este performanța normalizată a măsurii M_i pentru criteriul C_j ;
- w_j este ponderea criteriului C_j ;
- v_{ij} este valoarea normalizată ponderată.

Prin aplicarea acestei formule pentru toate cele șase măsuri și cele cinci criterii se obține matricea normalizată ponderată: $V=(v_{ij})$ cu forma:

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} \end{bmatrix}$$

și:

$$v_{ij}=w_j r_{ij}$$

Interpretarea ponderării

Prin această operație, criteriile nu mai contribuie în mod egal la calculul TOPSIS. Valorile normalizate sunt ajustate în funcție de importanța relativă stabilită prin profilul de ponderi.

De exemplu, dacă:

$$w_1 = 0.30$$

iar:

$$r_{11} = 0.40$$

atunci:

$$v_{11} = 0.30 \times 0.40 = 0.12$$

Separarea dintre performanță și preferință

Și în această etapă trebuie păstrată distincția metodologică stabilită anterior:

R = performanțe normalizate

W = preferințe exprimate prin ponderi

V = performanțe normalizate ponderate

Ponderile nu modifică matricea originală X și nici matricea normalizată R . Ele sunt aplicate într-o etapă distinctă pentru construirea matricei V , care va fi utilizată ulterior pentru identificarea soluției ideale pozitive și a soluției non-ideale.

Condiția de comparabilitate cu WSM

Pentru ca diferențele dintre WSM și TOPSIS să fie atribuite metodei MCDA, trebuie utilizat exact același profil de ponderi:

$$W_{\text{TOPSIS}} = W_{\text{WSM}}$$

Verificarea matricei ponderate

Pentru fiecare element se va verifica relația:

$$v_{ij} = w_j r_{ij}$$

iar dimensiunea matricei trebuie să rămână: 6×5

Rezultatul acestei etape este matricea normalizată ponderată: $V = (v_{ij})$

12.6. Determinarea soluției ideale pozitive și a soluției non-ideale

După construirea matricei normalizate ponderate, metoda TOPSIS definește două profiluri de referință:

$$A^+$$

soluția ideală pozitivă, și:

$$A^-$$

soluția non-ideală.

Aceste două profiluri nu reprezintă măsuri reale din setul analizat. Ele sunt construite artificial, pe baza celor mai favorabile și, respectiv, celor mai puțin favorabile valori observate pentru fiecare criteriu în matricea normalizată ponderată.

Soluția ideală pozitivă

Pentru fiecare criteriu C_j , soluția ideală pozitivă reține cea mai favorabilă valoare dintre toate măsurile.

În prezentul experiment toate criteriile sunt orientate spre maximizare, deci:

$$v_j^+ = \max_i(v_{ij})$$

iar profilul ideal pozitiv este:

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, v_3^+, v_4^+, v_5^+)$$

Astfel, A^+ este un profil ipotetic care combină cea mai bună performanță ponderată observată pentru fiecare dintre cele cinci criterii.

De exemplu, dacă pentru criteriul climatic valorile ponderate sunt:

$$0.12, 0.10, 0.08, 0.09, 0.11, 0.07$$

atunci:

$$v_j^+ = 0.12$$

Soluția non-ideală

În mod analog, pentru fiecare criteriu se identifică cea mai puțin favorabilă valoare:

$$v_j^- = \min_i(v_{ij})$$

iar soluția non-ideală devine:

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, v_3^-, v_4^-, v_5^-)$$

În exemplul anterior:

$$v_j^- = 0.07$$

Utilizarea directă a maximului și minimului

Această regulă este valabilă în forma simplă de mai sus deoarece toate criteriile experimentului au fost definite cu aceeași orientare:

valoare mai mare $\Rightarrow$ performanță mai favorabilă

adică toate sunt criterii de tip benefit.

Dacă ar exista și criterii de tip cost, pentru care o valoare mai mică este preferabilă, regula ar trebui adaptată.

Verificarea rezultatului

Pentru fiecare criteriu trebuie să fie respectată relația:

$$v_j^+ \geq v_{ij} \geq v_j^-$$

pentru toate măsurile M_i .

Rezultatul subsecțiunii este obținerea celor două vectori: A^+ și A^-

12.7. Calcularea distanțelor față de soluțiile ideale

După determinarea soluției ideale pozitive A^+ și a soluției non-ideale A^- , fiecare măsură este evaluată prin distanța sa față de aceste două profiluri de referință.

Pentru măsura M_i , reprezentată în matricea normalizată ponderată prin vectorul:

$$V_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, v_{i5})$$

se calculează două distanțe euclidiene.

Distanța față de soluția ideală pozitivă este:

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^5 (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

ar distanța față de soluția non-ideală este:

$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^5 (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

unde:

- este valoarea normalizată ponderată a măsurii M_i pentru criteriul C_j ;
- v_j^+ este valoarea ideală pozitivă pentru criteriul C_j ;
- v_j^- este valoarea anti-ideală pentru criteriul C_j .

Pentru fiecare dintre cele șase măsuri vor rezulta astfel două valori: D_i^+ și D_i^-

Interpretarea distanțelor

Logica TOPSIS este următoarea:

D_i^+ cât mai mic

înseamnă că măsura este mai apropiată de profilul ideal pozitiv, iar:

D_i^- cât mai mare

înseamnă că măsura este mai îndepărtată de profilul non-ideal.

Prin urmare, o alternativă favorabilă ar trebui să satisfacă simultan:

distanță mică față de A^+

și:

distanță mare față de A^-

Exemplu conceptual

Presupunem, exclusiv pentru ilustrare, că pentru o măsură M_i avem:

$$D_i^+ = 0.08$$

și:

$$D_i^- = 0.21$$

iar pentru o altă măsură M_k :

$$D_i^+ = 0.16$$

și:

$$D_i^- = 0.10$$

Prima măsură este mai apropiată de soluția ideală pozitivă și mai îndepărtată de soluția anti-ideală decât a doua. În logica TOPSIS, aceasta indică o poziționare mai favorabilă.

Totuși, cele două distanțe nu sunt utilizate separat pentru construirea clasamentului final. Ele vor fi combinate în etapa următoare prin coeficientul de apropiere relativă.

De ce se utilizează distanța euclidiană

Distanța euclidiană măsoară diferența geometrică dintre profilul unei măsuri și profilul de referință pe ansamblul celor cinci criterii. Ridicarea la pătrat face ca abaterile pozitive și negative să contribuie prin mărimea lor, iar radicalul readuce rezultatul la forma unei distanțe.

Reguli de verificare

Pentru fiecare măsură trebuie să fie respectate:

$$D_i^+ \geq 0$$

și:

$$D_i^- \geq 0$$

Dacă o măsură coincide exact cu soluția ideală pozitivă, atunci:

$$D_i^+ = 0$$

iar dacă ar coincide exact cu soluția non-ideală:

$$D_i^- = 0$$

Aceste situații sunt posibile matematic, chiar dacă în practică profilurile A^+ și A^- pot combina valori provenite de la măsuri diferite.

Pentru fiecare dintre cele șase măsuri se va obține o pereche: (D_i^+, D_i^-)

iar rezultatele pot fi organizate astfel:

Măsură	Distanța față de A^+	Distanța față de A^-
M1	D_1^+	D_1^-
M2	D_2^+	D_2^-
...	...	...
M6	D_6^+	D_6^-

12.8. Calcularea coeficientului de apropiere

După calcularea distanțelor fiecărei măsuri față de soluția ideală pozitivă și față de soluția non-ideală, TOPSIS combină cele două informații într-un singur indicator, denumit *coeficient de apropiere relativă față de soluția ideală*.

Pentru fiecare măsură M_i , coeficientul TOPSIS se calculează astfel:

$$C_i^* = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}$$

unde:

- D_i^+ este distanța măsurii M_i față de soluția ideală pozitivă;
- D_i^- este distanța măsurii M_i față de soluția anti-ideală;
- C_i^* este coeficientul de apropiere relativă și reprezintă scorul TOPSIS al măsurii.

Coeficientul are valori în intervalul:

$$0 \leq C_i^* \leq 1$$

Interpretarea coeficientului

Logica formulei este directă. O măsură este mai favorabilă dacă:

$$D_i^+$$

este mic, adică măsura este aproape de soluția ideală, și simultan:

$$D_i^-$$

este mare, adică măsura este departe de soluția non-ideală.

În această situație, coeficientul:

$$C_i^*$$

va avea o valoare mai apropiată de 1.

Prin urmare: $C_i^* \rightarrow 1$ indică o poziționare mai favorabilă față de soluția ideală, în timp ce $C_i^* \rightarrow 0$ indică o poziționare mai apropiată de soluția non-ideală.

Exemplu conceptual

Presupunem, exclusiv pentru ilustrare, că pentru măsura M_1 :

$$D_1^+ = 0.08$$

și:

$$D_1^- = 0.21$$

Atunci:

$$C_1^* = \frac{0.21}{0.08 + 0.21} = \frac{0.21}{0.29} \approx 0.724$$

Pentru o altă măsură M_2 , presupunem:

$$D_2^+ = 0.16$$

și:

$$D_2^- = 0.10$$

Atunci:

$$C_2^* = \frac{0.10}{0.16 + 0.10} = \frac{0.10}{0.26} \approx 0.385$$

În această situație:

$$C_1^* > C_2^*$$

deci M_1 este mai favorabilă decât M_2 conform TOPSIS.

Coeficientul combină apropierea de soluția ideală și depărtarea față de soluția non-ideală într-o singură măsură relativă.

Această proprietate este importantă deoarece o alternativă poate fi relativ aproape de soluția ideală, dar și relativ aproape de soluția anti-ideală. TOPSIS urmărește simultan ambele poziționări.

Relația poate fi interpretată astfel:

$$C_i^* = \frac{\text{distanța față de non - ideal}}{\text{distanța față de ideal} + \text{distanța față de non - ideal}}$$

Cu cât alternativa este mai departe de A^- și mai aproape de A^+ , cu atât C_i^* este mai mare.

Este important ca indicatorul C_i^* să nu fie interpretat ca procent de performanță sau probabilitate.

Coeficientul reprezintă un indicator relativ de apropiere de soluția ideală în spațiul multicriterial definit de TOPSIS. Această precizare este similară celei făcute anterior pentru scorul WSM: niciunul dintre cele două scoruri nu reprezintă direct o mărime fizică sau un rezultat de politică publică.

Pentru fiecare dintre cele șase măsuri se va calcula: C_i^*

iar rezultatele vor putea fi organizate astfel:

Măsură	D_i^+	D_i^-	C_i^*
M1	...	...	...
M2	...	...	...
...	...	...	...
M6	...	...	...

Vectorul scorurilor TOPSIS va fi:

$$C^* = (C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*, C_5^*, C_6^*)$$

12.9. Construirea clasamentului TOPSIS

După calcularea coeficientului de apropiere relativă pentru fiecare măsură: C_i^*

clasamentul TOPSIS se construiește prin ordonarea descrescătoare a acestor valori.

Formal:

$$C_{(1)}^* \geq C_{(2)}^* \geq \dots \geq C_{(6)}^*$$

unde:

- $C_{(1)}^*$ este cea mai mare valoare a coeficientului de apropiere;
- $C_{(6)}^*$ este cea mai mică valoare.

Măsura cu cea mai mare valoare C_i^* primește rangul:

$$\text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i) = 1$$

iar măsurile următoare sunt ordonate în funcție de valorile descrescătoare ale coeficientului.

Interpretarea ordinii

În TOPSIS, o valoare mai mare a lui C_i^* indică o poziționare mai favorabilă, deoarece măsura este, în termeni relativi, mai apropiată de soluția ideală pozitivă și mai îndepărtată de soluția anti-ideală.

Prin urmare:

$$C_a^* > C_b^*$$

Implică:

$$M_a >_{TOPIS} M_b$$

Exemplu conceptual

Presupunem următoarele valori, utilizate exclusiv pentru ilustrare:

Măsură	C_i^*
M1	0.724
M2	0.615
M3	0.681
M4	0.492
M5	0.438
M6	0.557

După ordonarea descrescătoare:

$$M_1 > M_3 > M_2 > M_6 > M_4 > M_5$$

iar clasamentul devine:

Rang	Măsură	Scor TOPSIS
1	M1	0.724
2	M3	0.681
3	M2	0.615
4	M6	0.557
5	M4	0.492
6	M5	0.438

Regula pentru egalități

Ca și în cazul WSM, trebuie definită explicit situația în care două măsuri obțin același coeficient de apropiere.

Dacă:

$$C_a^* = C_b^*$$

cele două măsuri vor fi tratate ca având același rang sau vor fi marcate explicit ca egalitate. Nu va fi introdusă o regulă arbitrară de departajare doar pentru a obține un clasament strict.

Această alegere păstrează coerența cu regula stabilită anterior pentru WSM și este importantă și pentru calculul ulterior al Kendall's τ , unde egalitățile trebuie tratate explicit.

Precizia numerică

Calculul interne vor utiliza precizia completă disponibilă.

Rotunjirea coeficienților C_i^* se va face numai la afișare.

De exemplu, dacă:

$$C_1^* = 0.681437$$

și:

$$C_2^* = 0.681421$$

ordinea va fi determinată pe baza valorilor complete, chiar dacă ambele ar putea fi afișate ca: 0.681

Reproductibilitatea clasamentului

TOPSIS este determinată pentru aceleași date de intrare.

Astfel:

$$\text{Ranking}_{\text{TOPSIS}}(X, W)$$

trebuie să producă același rezultat la rulări repetate, atâta timp cât X și W rămân neschimbate.

Rezultatul subsecțiunii

La finalul acestei etape vom avea R_{TOPSIS} , adică un clasament complet al celor șase măsuri, construit pe baza valorilor C_i^* .

Rezultatul va include pentru fiecare măsură:

- coeficientul de apropiere C_i^* ;
- rangul TOPSIS;
- eventualele egalități;
- ordinea finală a măsurilor.

Acest clasament va putea fi comparat direct cu $\text{Ranking}_{\text{WSM}}$

12.10. Compararea clasamentelor WSM și TOPSIS

După construirea clasamentului TOPSIS, acesta va fi comparat direct cu clasamentul obținut anterior prin metoda WSM. Scopul acestei comparații este identificarea măsurilor care își păstrează poziția și a celor pentru care poziția se modifică atunci când mecanismul de agregare este schimbat, în condițiile în care matricea criteriu–performanță și profilul de ponderi rămân identice.

Pentru fiecare măsură M_i se vor înregistra:

$$\text{Rank}_{\text{WSM}}(M_i) \text{ și } \text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i)$$

Diferența de poziție poate fi exprimată prin:

$$\Delta \text{Rank}_i = \text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i) - \text{Rank}_{\text{WSM}}(M_i)$$

Interpretarea diferenței de rang

Dacă:

$$\Delta \text{Rank}_i = 0$$

măsura ocupă aceeași poziție în ambele clasamente.

Dacă:

$$\Delta Rank_i < 0$$

măsura ocupă o poziție mai bună în TOPSIS decât în WSM.

Dacă:

$$\Delta Rank_i > 0$$

măsura ocupă o poziție mai slabă în TOPSIS.

Tabelul de comparație

Rezultatele vor putea fi sintetizate într-un tabel de forma:

Măsură	Scor WSM	Rang WSM	C_i^* TOPSIS	Rang TOPSIS	$\Delta Rank_i$
M1	...	...	...	...	...
M2	...	...	...	...	...
M3	...	...	...	...	...
M4	...	...	...	...	...
M5	...	...	...	...	...
M6	...	...	...	...	...

Observație: Scorurile WSM și TOPSIS nu vor fi comparate numeric între ele. Ele au definiții și scale diferite:

$$S_i^{WSM}$$

este o sumă ponderată a performanțelor, în timp ce:

$$C_i^*$$

este un coeficient de apropiere relativă de soluția ideală.

comparația relevantă este între pozițiile și relațiile de ordine, nu între valorile numerice brute ale scorurilor.

Identificarea inversărilor de ordine

Pe lângă diferența de rang a fiecărei măsuri, vor fi identificate perechile pentru care relația de ordine se modifică între cele două metode.

Dacă WSM produce:

$$M_a >_{WSM} M_b$$

iar TOPIS

$$M_b >_{TOPIS} M_a$$

atunci pentru perechea (M_a, M_b) există o inversare de ordine între metode.

În cazul celor șase măsuri vor fi analizate cele:

$$\frac{6(6-1)}{2} = 15$$

perechi distincte.

Pentru fiecare pereche se poate înregistra:

Pereche	Ordine WSM	Ordine TOPSIS	Concordanță
M1–M2	$M1 > M2$	$M1 > M2$	Da
M1–M3	$M1 > M3$	$M3 > M1$	Nu
...	...	...	...

Interpretarea diferențelor

O diferență între cele două clasamente nu va fi considerată automat o eroare.

WSM și TOPSIS utilizează mecanisme diferite:

WSM $\rightarrow$ suma performanțelor ponderate

TOPSIS $\rightarrow$ poziționarea față de ideal și non-ideal

Prin urmare, două măsuri cu scoruri agregate apropiate în WSM pot fi diferențiate altfel în TOPSIS în funcție de configurația performanțelor lor pe cele cinci criterii.

Rezultatul subsecțiunii este, prin urmare:

$$R_{WSM} \leftrightarrow R_{TOPIS}$$

cu identificarea explicită a diferențelor de poziție și a inversărilor de ordine produse exclusiv de schimbarea metodei MCDA.

12.11. Compararea prin Kendall's τ

După construirea celor două clasamente R_{WSM} și R_{TOPIS} gradul de concordanță globală dintre acestea va fi evaluat prin coeficientul de corelație de rang Kendall:

$$\tau(R_{WSM}, R_{TOPIS})$$

Scopul este de a cuantifica măsura în care cele două metode MCDA păstrează aceleași relații de ordine între cele șase măsuri, în condițiile în care matricea criteriu–performanță X și profilul de ponderi W sunt identice.

Pentru cele șase măsuri analizate există:

$$\frac{6(6-1)}{2} = 15$$

perechi distincte

Pentru fiecare pereche (M_a, M_b) , se verifică dacă ordinea este aceeași în cele două clasamente.

O pereche este concordantă dacă, de exemplu:

$$M_a >_{WSM} M_b$$

și

$$M_a >_{TOPIS} M_b$$

O pereche este discordantă dacă ordinea se inversează:

$$M_a >_{WSM} M_b$$

și

$$M_a >_{TOPIS} M_b$$

sau echivalent:

$$M_b >_{TOPIS} M_a$$

În absența egalităților, coeficientul poate fi exprimat prin:

$$\tau = \frac{C - D}{C + D}$$

unde:

- C = numărul perechilor concordante;
- D = numărul perechilor discordante.

Deoarece:

$$C + D = 15$$

pentru cele șase măsuri, valoarea lui τ reflectă direct echilibrul dintre relațiile păstrate și cele inversate.

Exemplu conceptual

Presupunem, exclusiv pentru ilustrare, că dintre cele 15 perechi:

$$C = 14$$

și

$$D = 1$$

Atunci:

$$\tau = \frac{14 - 1}{14 + 1} = \frac{13}{15} \approx 0.867$$

Această valoare indică o concordanță ridicată între cele două clasamente, chiar dacă o relație de ordine s-a inversat.

Utilizarea Kendall's τ_b

Deoarece metodologia experimentului permite existența unor egalități de rang atât în WSM, cât și în TOPSIS, implementarea va utiliza *Kendall's τ_b* , care ajustează coeficientul pentru prezența egalităților.

Astfel, aceeași procedură poate fi aplicată indiferent dacă cele două clasamente sunt strict ordonate sau conțin poziții egale. În absența egalităților, τ_b conduce la aceeași interpretare ca forma simplă prezentată anterior.

Interpretarea coeficientului

Coeficientul are valori în intervalul:

$$-1 \leq \tau \leq 1$$

unde:

$$\tau = 1$$

indică concordanță perfectă a ordinii,

$$\tau \approx 0$$

indică o concordanță globală redusă, iar:

$$\tau = -1$$

indică o inversare completă a ordinii.

Coeficientul descrie *concordanța relațiilor de ordine dintre perechi*.

12.12. Interpretarea diferențelor dintre metode

Diferențele dintre clasamentele produse de WSM și TOPSIS trebuie interpretate ca efecte posibile ale mecanismului de agregare utilizat, nu automat ca erori de calcul sau inconsistențe ale datelor.

În cadrul metodologiei, matricea criteriu–performanță și profilul de ponderi sunt menținute constante:

$$X = \text{constant și } W = \text{constant}$$

iar singurul element care se modifică este metoda MCDA:

$$\text{WSM} \rightarrow \text{TOPSIS}$$

Prin urmare, dacă o măsură își schimbă poziția între cele două clasamente, această variație trebuie analizată în raport cu logica diferită a celor două metode. De aceea, două măsuri cu scoruri WSM apropiate pot fi ordonate diferit de TOPSIS dacă profilurile lor pe criterii sunt distribuite diferit.

De exemplu, o măsură poate obține în WSM un scor ridicat prin compensarea unei performanțe slabe pe un criteriu prin performanțe foarte bune pe alte criterii. În TOPSIS, aceeași configurație poate conduce la o poziționare diferită, deoarece distanța față de profilul ideal este calculată pe întregul vector al performanțelor normalizate și ponderate.

În acest sens, o schimbare de rang nu indică în sine că una dintre metode este greșită, ci faptul că poziția măsurii este sensibilă la modul în care informația multicriterială este agregată.

Tipuri de rezultate posibile

Pot apărea trei situații principale.

Dacă:

$$\text{Rank}_{\text{WSM}}(M_i) = \text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i)$$

măsura își păstrează poziția, ceea ce indică stabilitate față de schimbarea metodei.

Dacă poziția se modifică ușor, de exemplu:

$$2 \rightarrow 3$$

iar majoritatea relațiilor de ordine rămân neschimbate, diferența poate fi considerată locală.

Dacă apar mai multe schimbări de poziție sau inversări între perechi, atunci clasamentul prezintă o dependență mai pronunțată față de alegerea metodei MCDA.

Observație

Un principiu important al metodologiei este că rezultatele nu trebuie ajustate pentru a obține artificial două clasamente identice.

Dacă:

$$R_{\text{WSM}} \neq R_{\text{TOPSIS}}$$

diferențele vor fi păstrate și analizate.

Nu se vor modifica retrospectiv:

- matricea X ;
- ponderile W ;
- valorile sintetice;
- regulile de normalizare;
- parametrii metodei,

doar pentru a crește concordanța dintre clasamente.

Diferența observată este ea însăși un rezultat experimental.

Analiza unei schimbări de poziție

Pentru fiecare măsură care își modifică rangul vor fi examinate cel puțin:

$$\text{Rank}_{\text{WSM}}(M_i)$$

$$\text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i)$$

și:

$$\Delta \text{Rank}_i = \text{Rank}_{\text{TOPSIS}}(M_i) - \text{Rank}_{\text{WSM}}(M_i)$$

În plus, trebuie identificată relația sau relațiile pereche-cu-pereche care s-au inversat (perechi discordante).

Relația cu Kendall's τ

Diferențele individuale trebuie interpretate împreună cu rezultatul global:

$$\tau(R_{\text{WSM}}, R_{\text{TOPSIS}})$$

Este posibil ca o măsură să își schimbe poziția, dar coeficientul Kendall să rămână ridicat dacă majoritatea celorlalte relații dintre perechi sunt păstrate.

De aceea:

schimbare locală de rang

nu este echivalentă cu:

divergență globală între metode

Cele două niveluri trebuie raportate separat.

Interpretarea corectă a divergenței

Dacă WSM și TOPSIS produc rezultate diferite, nu înseamnă că una dintre metode produce un rezultat greșit. Se poate afirma că în cazul dat, clasamentul prezintă o anumită sensibilitate față de alegerea metodei de agregare multicriterială.

În mod similar, dacă cele două metode produc clasamente foarte apropiate, concluzia este că ordinea măsurilor este relativ consistentă între cele două mecanisme de agregare analizate.

Rezultatul subsecțiunii

La finalul acestei etape, diferențele dintre WSM și TOPSIS vor fi interpretate pe două niveluri: *nivel local*, prin schimbările de rang și inversările dintre perechi și *nivel global* prin Kendall's τ .

Schimbarea poziției unei măsuri nu este tratată automat ca eroare, ci ca informație privind dependența rezultatului de metoda MCDA utilizată.

12.13. Regula privind pragul de concordanță

Pentru evaluarea concordanței dintre clasamentele obținute prin WSM și TOPSIS se va utiliza ca reper:

$$\tau \geq 0.8$$

Această valoare reprezintă o țintă de concordanță între cele două metode de agregare multicriterială și nu un prag pentru analiza de sensibilitate a ponderilor.

Interpretarea este următoarea:

$$\tau \geq 0.8$$

indică o concordanță ridicată între cele două clasamente, ceea ce sugerează că ordinea măsurilor este relativ stabilă față de schimbarea mecanismului de agregare.

Dacă:

$$\tau < 0.8$$

clasamentele prezintă un nivel mai redus de concordanță, iar diferențele trebuie analizate explicit prin identificarea măsurilor și perechilor de măsuri a căror poziție sau relație de ordine se modifică.

Ambele situații pot fi raportate ca rezultate valide ale comparației metodologice.

Pragul nu va fi utilizat pentru ajustarea retrospectivă a datelor. Matricea criteriu–performanță X , profilul de ponderi W și regulile de calcul vor rămâne neschimbate, indiferent de valoarea obținută pentru τ .

Este important de subliniat că: $\tau \geq 0.8$

nu înseamnă că cele două metode sunt echivalente și nici că produc același clasament în toate detaliile. Pot exista diferențe locale de poziție sau una sau mai multe perechi discordante, chiar dacă nivelul global de concordanță rămâne ridicat.

Rezultatul subsecțiunii este definirea unei reguli explicite de evaluare:

$$\tau \geq 0.8 \rightarrow \text{concordanță ridicată între modele}$$

fără ca valoarea pragului să fie utilizată pentru forțarea sau recalibrarea rezultatului.

12.14. Reproductibilitatea comparației

Comparația dintre WSM și TOPSIS trebuie să fie complet reproductibilă. Pentru aceleași date de intrare și aceleași reguli de calcul, cele două metode trebuie să producă de fiecare dată aceleași scoruri, aceleași clasamente și aceeași valoare a coeficientului Kendall's τ .

Pentru asigurarea reproductibilității trebuie păstrate neschimbate:

- matricea X ;
- profilul de ponderi W ;
- orientarea criteriilor;
- regula de normalizare TOPSIS;
- regula de determinare a lui A^+ și A^- ;
- formula distanței euclidiene;
- formula coeficientului C_i^* ;
- regula de ordonare;
- regula pentru egalități;
- precizia numerică utilizată pentru comparații;
- varianta Kendall utilizată.

Este important ca rotunjirea să fie aplicată numai la afișare. Clasamentele și coeficientul Kendall vor fi calculate pe baza valorilor interne păstrate la precizie completă. Astfel se evită situațiile în care două rulări ar părea diferite doar din cauza unei rotunjiri premature.

12.15. Ce nu demonstrează comparația dintre metode

Compararea clasamentelor obținute prin WSM și TOPSIS oferă informații despre stabilitatea ordinii față de alegerea metodei de agregare, dar nu demonstrează validitatea absolută a clasamentului rezultat.

O concordanță ridicată între cele două metode, exprimată printr-o valoare mare a coeficientului Kendall's τ , indică faptul că relațiile de ordine dintre măsuri sunt în mare parte păstrate atunci când se schimbă mecanismul MCDA. Aceasta nu înseamnă însă că unul dintre clasamente este „adevărat” în sens obiectiv și nici că reprezintă singura ordine justificată posibilă.

În mod particular, comparația dintre metode nu demonstrează că:

- valorile sintetice ale performanțelor reprezintă efecte empirice reale ale măsurilor;
- profilul de ponderi utilizat reflectă preferințele reale ale experților, autorităților sau altor actori;
- WSM sau TOPSIS este metodologic superioară în mod absolut;
- un clasament cu o concordanță ridicată este normativ preferabil;
- măsura aflată pe primul loc trebuie selectată sau implementată;

- două metode care produc rezultate similare validează reciproc corectitudinea deciziei;
- valoare $\tau \geq 0.8$ demonstrează validitatea externă a rezultatului.

Această delimitare este importantă deoarece în experiment atât matricea criteriu–performanță, cât și profilul de ponderi sunt definite în condiții controlate, iar valorile utilizate au caracter sintetic.

O valoare mai redusă a lui Kendall's τ nu demonstrează automat că una dintre metode este incorectă. Valoarea indică faptul că ordinea măsurilor este mai dependentă de alegerea mecanismului MCDA și că această dependență trebuie raportată și analizată.

Concluzia permisă de această etapă este de forma: *Clasamentul prezintă un anumit nivel de consistență sau sensibilitate față de alegerea metodei de agregare.*

Comparația WSM–TOPSIS reprezintă un test de robustețe metodologică a ordinii.